

$$y = -1 + 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$y = 2 \cos \left[2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] - 1$$

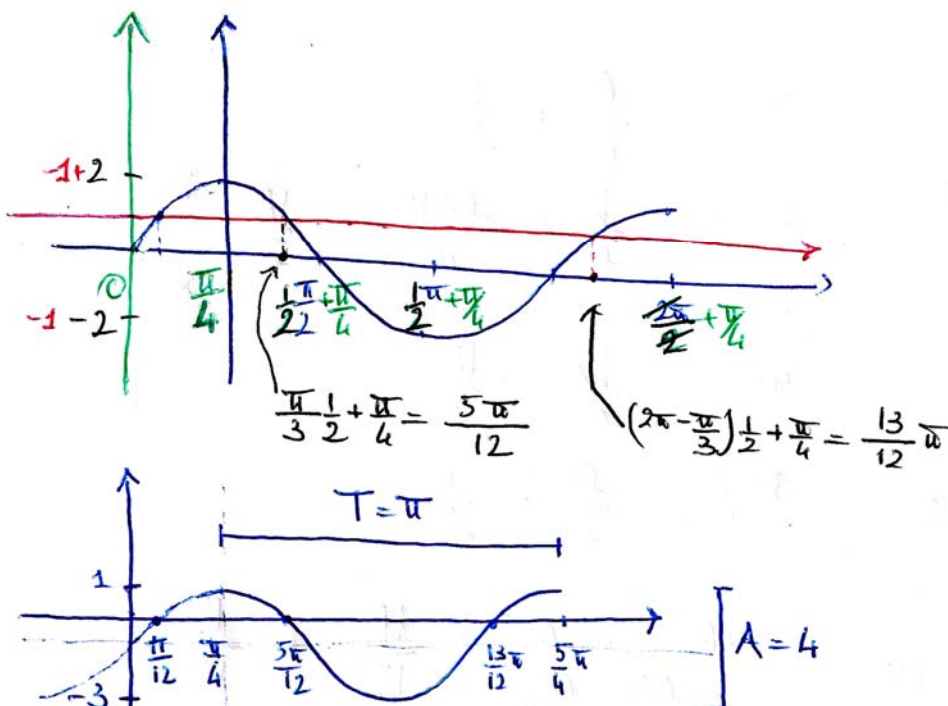
1) $y = \cos x$

2) $y = \cos 2x \rightarrow$ Divido per 2 tutte le ascisse
 $f(kx)$

3) $y = \cos \left[2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] \rightarrow$ Graf. trasla vs dx di $\frac{\pi}{4}$

4) $y = 2 \cos \left[2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] \rightarrow$ Moltiplico per 2
 tutte le ordinate $k f(x)$

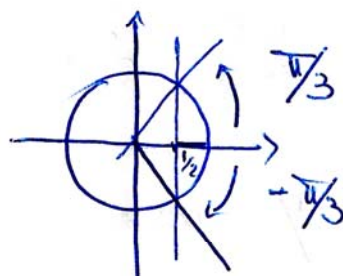
5) $y = 2 \cos \left[2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] - 1 \rightarrow$ Graf. trasla vs il basso
 di 1
 $f(x) + k$



Studio il segno di $f(x) = 2 \cos(2x - \frac{\pi}{2}) - 1$
algebricamente:

$$2 \cos(2x - \frac{\pi}{2}) - 1 > 0$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{2}) > \frac{1}{2}$$



$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi$$

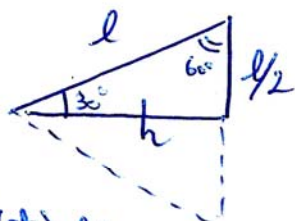
$$-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$+\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$+\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

Ricorda che:



Metà di
un triang. equil.
di lato l

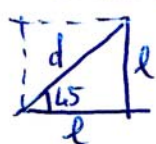
e altezza $h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$

$$\sin 30^\circ = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{l} = \frac{l/2\sqrt{3}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2}$$



Metà di un
quadrato
 $d = \frac{l}{\sqrt{2}}$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio:

Dopo aver tracciato la curva y grafica della funzione

$$f : x \rightarrow \frac{x^3}{x^2+1}$$

dedurre quella di f_1 della funzione

$$f_1 : x \rightarrow \left| \frac{x^3}{x^2+1} \right|$$

e rispondere ai seguenti quesiti:

a) la funzione f_1 è derivabile in $x_0 = 0$?

b) la funzione f_1 verifica nell'intervallo $[-1, 1]$ le ipotesi del teorema di Rolle?

$$y = \frac{x^3}{x^2+1}$$

$$x^2+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

la curva interseca gli assi nel punto $(0, 0)$

$$f(-x) = -\frac{x^3}{x^2+1} \neq f(x) \rightarrow \text{la funzione non è PARI}$$

$$-f(-x) = f(x) \rightarrow \text{la funzione è dispari}$$

Studio del comportamento della funzione agli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (\text{per ragioni di simmetria})$$

Ricerca asintoto obliquo

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3+x} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3} - x^3 - x}{x^2+1} = 0$$

$y = x$ equazione asintoto obliquo

$$y'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$$y'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad ; \quad \text{eventuale estremo}$$

$$y'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{la funzione è sempre crescente}$$

Per $x = 0$ si ha quindi un flesso a tangente orizzontale

$$y' = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - 2(x^2+1) \cdot 2x \cdot (x^4+3x^2)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2x \cancel{(x^2+1)} [(2x^2+3)\cancel{(x^2+1)} - 2(x^4+3x^2)]}{(x^2+1)^{4-1}} =$$

$$= \frac{2x \cdot (2\cancel{x^4} + 2x^2 + 3x^2 + 3 - 2\cancel{x^4} - 6x^2)}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 0$$

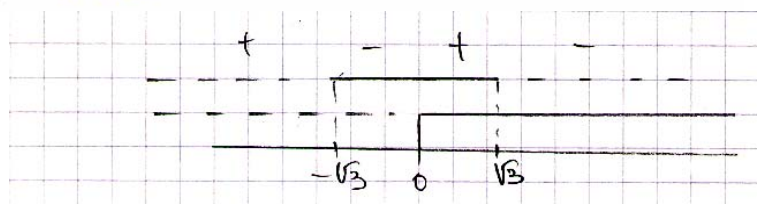
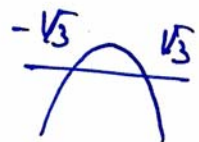
$$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

pt di flesso

$$y'' > 0 : N_1 > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$N_2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

$$D > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$$y''(x) > 0 \quad \text{per} \quad \begin{matrix} x < -\sqrt{3} \\ 0 < x < \sqrt{3} \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} x < -\sqrt{3} \\ 0 < x < \sqrt{3} \end{matrix}} \right\} \text{la concavità è rivolta verso l'alto}$$

$$y''(x) < 0 \quad \text{per} \quad \begin{matrix} x > \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} < x < 0 \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} x > \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} < x < 0 \end{matrix}} \right\} \text{la concavità è rivolta verso il basso}$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

per simmetria $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$(0, 0)$$

$$(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$$

$$(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$$

flexo a tg. orizzontale
punti di flexo

(a) Dal graf. sappiamo che $f'_{1+}(0) = 0 = f'_{1-}(0)$

$\Rightarrow f$ è derivabile

in $x=0$.

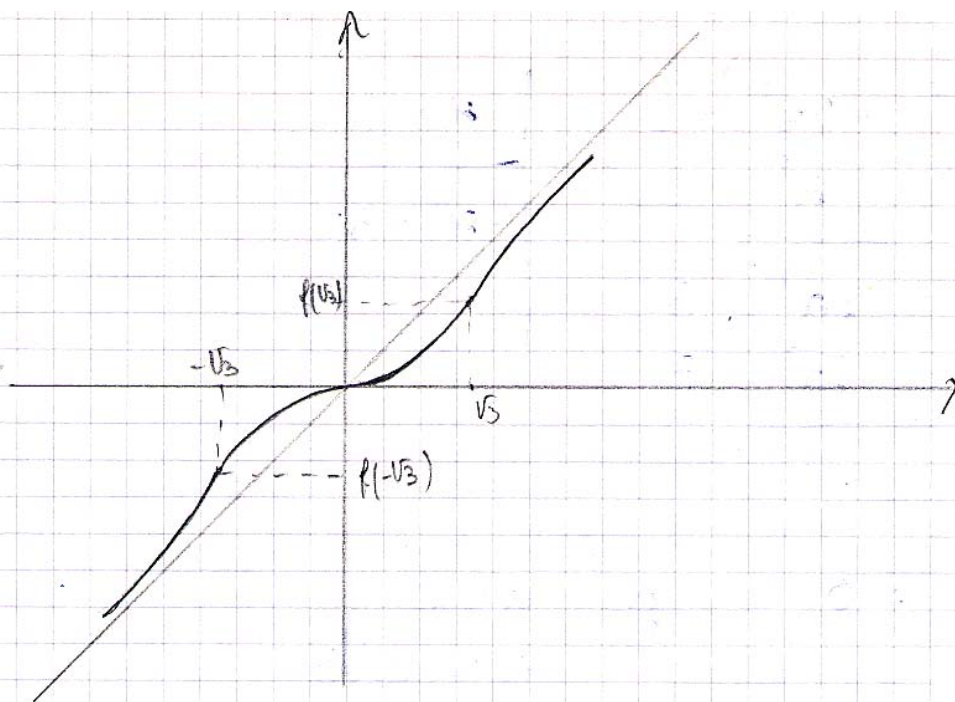
Infatti

$$f'_{1+}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left| \frac{h^3}{h^2+1} \right| =$$

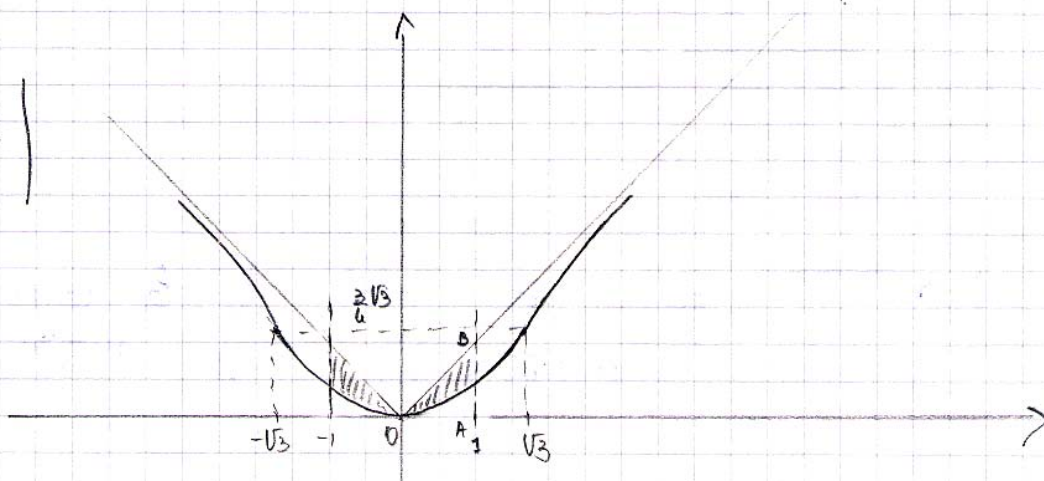
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h(h^2+1)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$f'_{1-}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\left| \frac{h^3}{h^2+1} \right|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{h^3}{h^2+1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{h^2}{h(h^2+1)} = 0.$$



$$g = \left| \frac{x^3}{x^2+1} \right|$$



b) Teorema di Rolle

Se una funzione $f(x)$ è continua in $[a, b]$,
derivabile in (a, b) e $f(a) = f(b)$.

$$\exists c \in (a, b) \mid f'(c) = 0$$

In questo caso $f(x)$ è continua in $[-1, 1]$
e derivabile

$$f(1) = \frac{1}{2} = f(-1) \Rightarrow \text{si può applicare il Teorema di Rolle}$$

TEOREMA di LAGRANGE

Hip : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x)$ è continua in $[a, b]$

$f(x)$ è derivabile in (a, b)

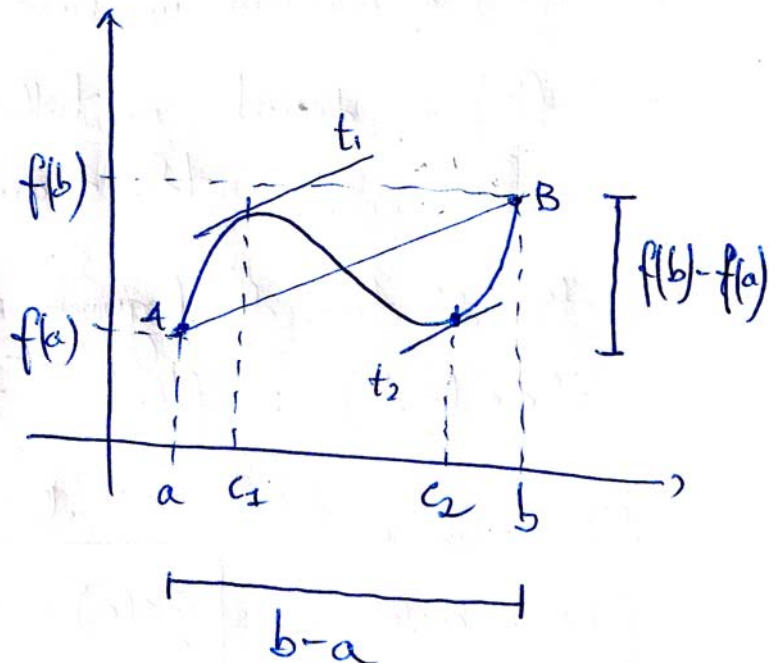
Th : $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
 "esiste almeno un pt c"

Significato geometrico :

IP II° membro

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ rappresenta

il coeff. angolare della
retta passante per i 2 pt
A e B.



Ricordo infatti che :

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

IP I° membro $f'(c)$ invece è il coeff. angolare della
retta tangente alla curva nel pt $x=c$.

$m_t = m_{AB} \Leftrightarrow t \parallel AB$

Condizione
di parallelismo

$\Rightarrow$ { Esiste almeno 1 pt c, interno
ad (a, b) , in cui la tangente
alla curva è parallela alla corda
congiungente i pt estremi A e B.

Es. 4 - Corrado 4/9/2013

$$f(x) = e^x$$

Si applichi il teor. di Lagrange alla funzione $f(x)$ nell'intervallo $[1, 2]$ per dimostrare che:

$$\forall x_1, x_2 \in [1, 2] \text{ t.c. } x_1 < x_2 \Rightarrow \overline{e^{x_2} - e^{x_1}} > e(x_2 - x_1)$$

$f(x) = e^x$ è una funz. continua in tutto $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ a maggior ragione in $[1, 2]$
 è una funz. derivabile in tutto $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ anche in $(1, 2)$

Le th. del teor. di Lagrange sono soddisfatte $\Rightarrow \exists c \in (1, 2)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Predichiamo 2 pt $x_1, x_2 \in [1, 2]$ con $x_1 < x_2$
 per il teor. di Lagrange: $(\Rightarrow x_2 - x_1 > 0)$

$$\exists c \in (x_1, x_2) \text{ t.c. } f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow e^c = \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}$$

$$1 < x_1 < c < x_2 < 2$$

$$\frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} = e^c > e$$

$f(x) = e^x$ è una funz. crescente
 Essendo $c > 1 \Rightarrow e^c > e^1 = e$

$$e^{x_2} - e^{x_1} > e(x_2 - x_1)$$

Teor. di Rolle

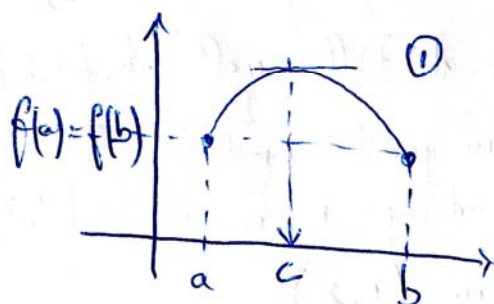
Ip: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

f continua in $[a, b]$

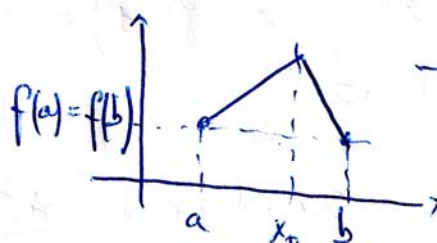
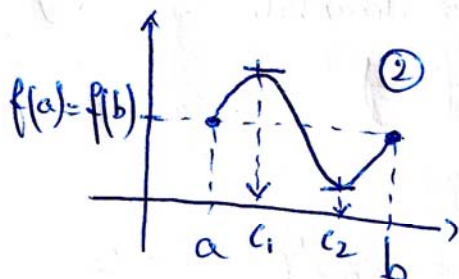
f derivabile in (a, b)

$f(a) = f(b)$ $\leftarrow$ assume valori uguali agli estremi dell'intervallo

Th: $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = 0$.



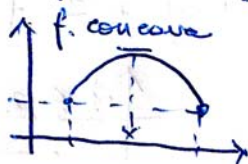
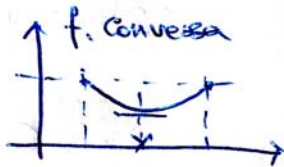
Signif. geometrica:
esiste almeno un pt interno ad (a, b) in cui la tg alla curva è orizz.



In questo caso però non sono soddisf. le Ip del teor. perché $f(x)$ non è derivabile nel pt x_0
 $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$

Obs. per capire se il pt c esiste ed è unico (caso ①) oppure no (caso ②) dobbiamo studiare il segno della derivata II.

Se $f''(x) > 0$ (opp. $f''(x) < 0$) $\forall x \in (a, b) \Rightarrow$



la soluzione dell'equaz.
 $f'(c) = 0 \exists!$

Es 1 - Corretto 17/6/2013

b) Dimostr. che l'equazione $2x \log(x) + x - \frac{4}{x} = 0$ ha almeno una soluz. nell'interv. $[1, 2]$

Applicare il teor. di Rolle nell'interv. $[1, 2]$ alla funz. $f(x) = (x^2 - 4) \log(x)$

c) Dim. che in $[1, 2]$ la soluz. è unica.

b) Consideriamo la funz. $f(x) = (x^2 - 4) \log x$ essa soddisfa le tip. del teor. di Rolle nell'int. $(1, 2)$ infatti:

- 1) è continua in quanto prodotto di funz. continue per $x > 0 \rightarrow$ in $[1, 2]$

↓

- 2) è derivabile in $(1, 2)$ perchè prod. di funz. derivabili

$\exists c \in (1, 2)$

t.c. $f'(c) = 0$

- 3) $f(1) = 0 = f(2)$

$$f'(x) = 2x \cdot \log x + \frac{x^2 - 4}{x} = 2x \log x + \frac{x^2}{x} - \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow f'(c) = 2c \log c + c - \frac{4}{c} = 0$$

Coincide proprio con l'equaz. iniziale

$\Rightarrow$ L'equaz. ha almeno 1 soluz. in $(1, 2)$

c) $f''(x) = 2 \log x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 + \frac{4}{x^2} = 2 \log x + 3 + \frac{4}{x^2}$

$\hookrightarrow$ Sempre positiva!!
in $[1, 2]$



$\exists! c$ x trovarlo v. metodi iterativi

TEOREMA dell'ESISTENZA degli zeri

Se $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e se agli estremi dell'intervallo essa assume valori di segno opposto, ovvero $f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow$ essa si annulla in almeno un pt interno all'intervallo

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = 0.$$

Oss. Avrei potuto usare questo
 teor. anche per l'es. 1 - 17/6/13
 $\exists c \in (1, 2) : 2x \log x + x - \frac{4}{x} = 0$

$$f(x) = 2x \log x + x - \frac{4}{x} \quad \text{in } [1, 2]$$

$$f(1) = 1 - 4 = -3 < 0$$

$$f(2) = 4 \log 2 + 2 - 2 > 0$$

Quante interazioni dell'algoritmo di bisezione sarebbero necessarie per trovare un valore approssimato di questa soluzione con un errore non superiore a 0,125?

Oss: $0,125 = 125/1000 = 1/8$

$$d) \quad k \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1$$

$$k \geq \log_2 \frac{1}{1/8} - 1$$

$$k \geq \log_2 8 - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \text{Almeno 2 iteraz.}$$

Definizioni Max/min $\begin{cases} \text{relativo (o locale)} \\ \text{assoluto (o globale)} \end{cases}$

1) $f(x)$ ha in x_0 , $x_0 \in D$, un pt di max assoluto (o globale) se la funzione assume in x_0 un valore NON MINORE (ovvero $\geq$) di quelli che essa assume negli altri pt del Dominio

$$\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D_f$$

Analogamente: $f(x)$ ha in x_0 un pt di min assoluto se $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D_f$

2) In x_0 , INTERNO a D_f , si ha un pt di max relativo per la f se esiste un intorno completo di x_0 (I_{x_0}) per ogni x del quale si ha: $f(x) \leq f(x_0)$

$\Rightarrow$ Per $x = x_0$, INTERNO a D , si ha un pt di max rel. se $\exists I_{x_0}$ t.c. $\forall x \in I_{x_0} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

Ricordo che un pt si dice interno a un insieme se esiste un intorno del pt interamente costituito da elementi dell'insieme.

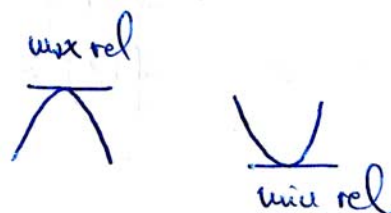
Oss. Per la validità del teor. di Fermat è essenziale che si tratti di max/min relativo, cioè che x_0 sia interno al dominio della funzione.

TEOREMA di FERMAT

Hp : f è derivabile in x_0
 x_0 è un estremo relativo per la f
 Th : $f'(x_0) = 0$

Signif. geom. :

In un pt di max o min rel.
 la tg alla curva $y = f(x)$
 è orizzontale.



Oss. : Non vale il viceversa !!

Se $f'(x_0) = 0$

è una condiz. Nec., ma non Suff
 affinché x_0 sia un pt di estremo rel.

non è detto che x_0 sia
 un estremo rel. della funzione.

Potrebbe infatti trattarsi anche
 di un flesso a tg. orizzontale !

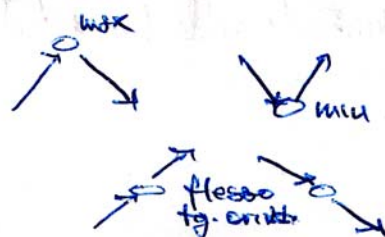
Oss : quando nello
 studio di funzione
 si cercano i pt
 per cui si annulla
 la derivata prima

pt. STATIONARI :

($y' = 0$), si cercano i

estremi relativi
 o flesso a tg. orizz.

E per capire di
 quale dei 3 casi si tratta
 si studia il segno di y'
 ovvero la monotonia di $f(x)$



Es. 3 - COMPITO 19 Febr. 2013

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

continua in $[-1, 1]$

e derivabile in $(-1, 1)$

e t.c. $f(-1) = -1$

$$f(0) = 2$$

$$f(1) = 1$$

Dimostrare che

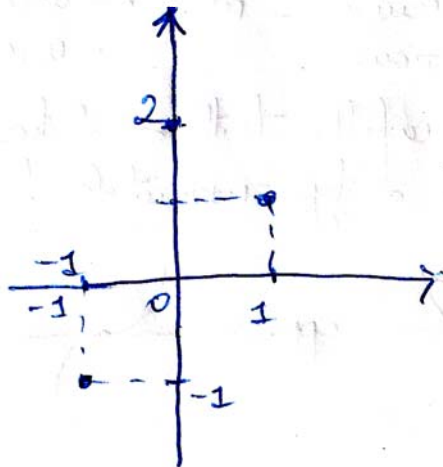
$\exists c \in (-1, 1)$ t.c.

$$Df(c) = 0.$$

$f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato

$\Rightarrow$ per il teor. di Weierstrass

essa ammette max e min globale



Sicuramente il massimo assoluto non sarà agli estremi dell'interv., perché

$$f(0) > f(-1)$$

$$f(0) > f(1)$$



Il max assoluto è interno all'intervallo $(-1, 1)$

$$\exists c \in (-1, 1) : f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Essendo il max globale (o assoluto) anche un pt di max locale (o relativo) per il teor. di Fermat

$$f'(c) = 0.$$

Es. Compito 15/1/14

$$y = e^{-x} (2x + x^2)$$

$$D: \mathbb{R}$$

$$f(-x) = e^x (-2x + x^2) \rightarrow \text{ne' pari, ne' disp}$$

$$\text{Int. asse } y (x=0) \Rightarrow y = e^0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \text{Passa per l'origine}$$

$$\text{Int. asse } x (y=0) \Rightarrow e^{-x} (2x + x^2) = 0$$

$$\text{Segno di } f(x): \quad \downarrow \quad x(2+x)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow 2x + x^2 > 0$$

$$\text{Graph of } 2x + x^2 \Rightarrow x < -2 \cup x > 0$$

Studio del comportamento della funz. agli estremi del campo di esistenza.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} (2x + x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + x^2}{e^x} = 0$$

$0 \cdot (+\infty)$ $(\frac{\infty}{\infty})$

↑
Cresce più rapidamente di Den.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} (2x + x^2) = +\infty$$

$(+\infty) \cdot (+\infty)$

↓
L'asse x è
Asint. Diritto

Puo' essere un asint. obliquo
di equaz: $y = mx + q$

Ricerca dell'eventuale
Asint. Obl. $\Rightarrow$ No!

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} \cdot x(2+x)}{x} = -\infty$$

$(+\infty) \cdot (-\infty)$

Pt. stazionari e monotonia della $f(x)$

$$y' = -e^{-x}(2x+x^2) + e^{-x}(2+2x) =$$

$$= e^{-x}(-\cancel{2x} - x^2 + 2 + \cancel{2x}) = e^{-x}(2-x^2)$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad \text{pt. Stazionari}$$

$$y' > 0 \Rightarrow 2-x^2 > 0 \quad \begin{array}{c} -\sqrt{2} \quad \sqrt{2} \end{array}$$

Per i val. interni

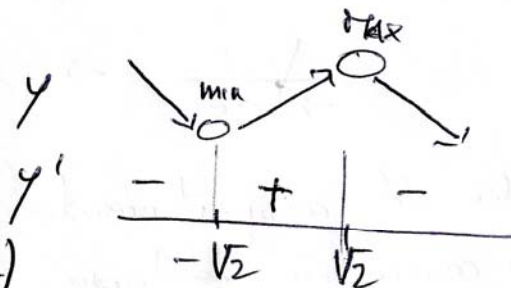
$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

per $x = -\sqrt{2}$ si ha

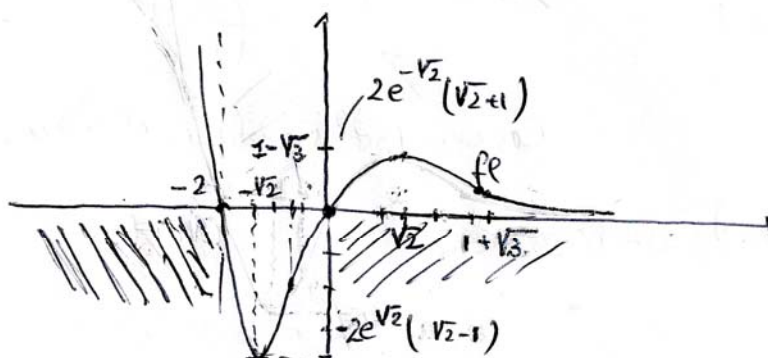
un min rel. e

$$\text{vale } f(-\sqrt{2}) = +e^{\sqrt{2}}(-2\sqrt{2}+2)$$

($\approx -3,41$) $\leftarrow < 0$



per $x = \sqrt{2}$ si ha un max rel e vale $f(\sqrt{2}) = e^{-\sqrt{2}}(2\sqrt{2}+2)$
($\approx 1,17$)



Concavità e pt di flesso: $y'' = [-e^{-x}(2-x^2) + e^{-x}(-2x)] =$

$$y'' = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \quad = -e^{-x}(2-x^2+2x) = \frac{x^2-2x-2}{e^x}$$

$$\Delta/4 = 1+2 = 3$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3} \rightarrow \text{pt di flesso}$$

