

Es

Dimostrare che l'equazione

$$\cos x + \ln(1+x^2) + 3x = 0$$

ha esattamente 1 radice in $\mathbb{R}$.Dim

Procediamo per ASSURDO

Supp. che l'equat. ammetta ^{almeno} 2 radici reali e siano x_1, x_2 con $x_1 < x_2$ 2 soluzioni

$$f(x) = \cos x + \ln(1+x^2) + 3x$$

$$f(x_1) = 0$$

$$f(x_2) = 0$$

Essendo somma e composiz.

di funz. continue e deriv., f è continua e deriv. in tutto $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ a maggior ragione f è continua in $[x_1, x_2]$
e deriv. in (x_1, x_2)

Le hp del teor. di Rolle sono
verificate $\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2)$
t.c. $f'(c) = 0$

$$f'(x) = -\sin x + \frac{2x}{1+x^2} + 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{2x}{1+x^2} + 3$$

$$\sin x = \frac{2x+3+3x^2}{1+x^2}$$

Osserviamo che

$$\frac{3x^2+2x+3}{1+x^2} > 1 \quad (*)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \neq 0$$

ASSURDO $\Leftarrow$ DTAI.

$$(*) \quad \frac{3x^2 + 2x + 3}{1 + x^2} > 1$$

$$\frac{3x^2 + 2x + 3 - 1 - x^2}{1 + x^2} > 0$$

$$\frac{2x^2 + 2x + 2}{1 + x^2} > 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

"falso quadrato"

Non è scomponibile ed
assume sempre lo stesso
segno (infatti $\Delta < 0$)

Abbiamo dimostrato che

esiste al piu' 1 radice $\Rightarrow$ o 1
o nessuno

$$\text{ma ... } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) + \frac{3\pi}{2} > 0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) - \frac{3\pi}{2} < 0$$

$\Downarrow$

per il teor. dell'esist. degli zeri
posso affermare che

l'equaz. ha esattamente 1 soluz.

Mostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n^2+n} = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon > 0 : n > N_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n+3}{2n^2+n} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{n+3}{2n^2+n} < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n+3}{2n^2+n} < \varepsilon & (a) \\ \frac{n+3}{2n^2+n} > -\varepsilon & (b) \end{cases}$$

$$(a) \frac{n+3}{2n^2+n} - \varepsilon < 0$$

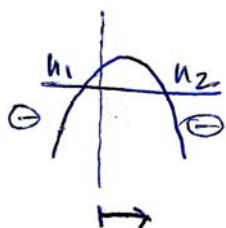
$$\frac{n+3-2\epsilon n^2-\epsilon n}{2n^2+n} < 0$$

$n \in \mathbb{N}$
↓
Deriv. è sempre
positivo.

$$-2\varepsilon n^2 + (1-\varepsilon)n + 3 < 0$$

$$\Delta = (1-\varepsilon)^2 + 24\varepsilon = 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 24\varepsilon = 1 + 22\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$n_{1,2} = \frac{(\epsilon - 1) \pm \sqrt{1 + 22\epsilon + \epsilon^2}}{-4\epsilon} \rightarrow (1 - \epsilon) \quad (\epsilon > 0)$$



la soluz. con $\oplus$
Non è accett.
perchè sicuramente < 0
ed $n \in \mathbb{N}$.

$$n \propto \frac{(\epsilon - 1) - \sqrt{1 + 22\epsilon + \epsilon^2}}{-4\epsilon}$$

$$n > \frac{(1-\epsilon) - \sqrt{1+22\epsilon+\epsilon^2}}{4\epsilon}$$

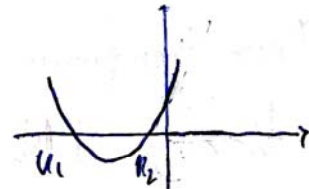
$$b) \frac{n+3}{2n^2+n} + \varepsilon > 0$$

$$\frac{n+3+2\varepsilon n^2+\varepsilon n}{2n^2+n} > 0$$

Il Den. > 0

$\Downarrow$

$$2\varepsilon n^2 + (1+\varepsilon)n + 3 > 0$$



$$\Delta = (1+\varepsilon)^2 - 24\varepsilon =$$

$$= 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon - 24\varepsilon = 1 - 22\varepsilon + \varepsilon^2 < (1+\varepsilon)^2 \quad (*)$$

$$n_{1,2} = \frac{-(1+\varepsilon) \pm \sqrt{1-22\varepsilon+\varepsilon^2}}{4\varepsilon}$$

$\rightarrow$ entrambi negativi

$$\Rightarrow 2\varepsilon n^2 + (1+\varepsilon)n + 3 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La soluzione del sistema

coincide con quella della (a) $\Rightarrow$ Basta prendere

$$N_\varepsilon = \frac{1-\varepsilon - \sqrt{1-22\varepsilon+\varepsilon^2}}{4\varepsilon}$$

(*) Per ε positivo, piccolo a piacere, $\Delta > 0$ infatti:

$$\varepsilon^2 - 22\varepsilon + 1 > 0$$

$$\Delta_4 = 21 - 1 = 20$$

$$\varepsilon_{1,2} = +11 \pm \sqrt{20}$$

$$\varepsilon > 11 + \sqrt{20} \cup \quad \boxed{0 < \varepsilon < 11 - \sqrt{20}} \quad (\approx 0.045)$$

Eg 65 (Esercizio)

Grafico: $y = x + |x^2 + 6x - 3|$

det i max e min globali nell'intervallo $[-4, 1]$

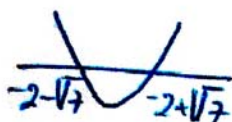
Discussione del valore assoluto:

$$|x^2 + 6x - 3| = \begin{cases} x^2 + 6x - 3, & x^2 + 6x - 3 \geq 0 \\ -x^2 - 6x + 3, & x^2 + 6x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 6x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 3 = 7$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{7}$$



$$x^2 + 6x - 3 > 0$$

$$x < -2 - \sqrt{7} \cup x > -2 + \sqrt{7}$$

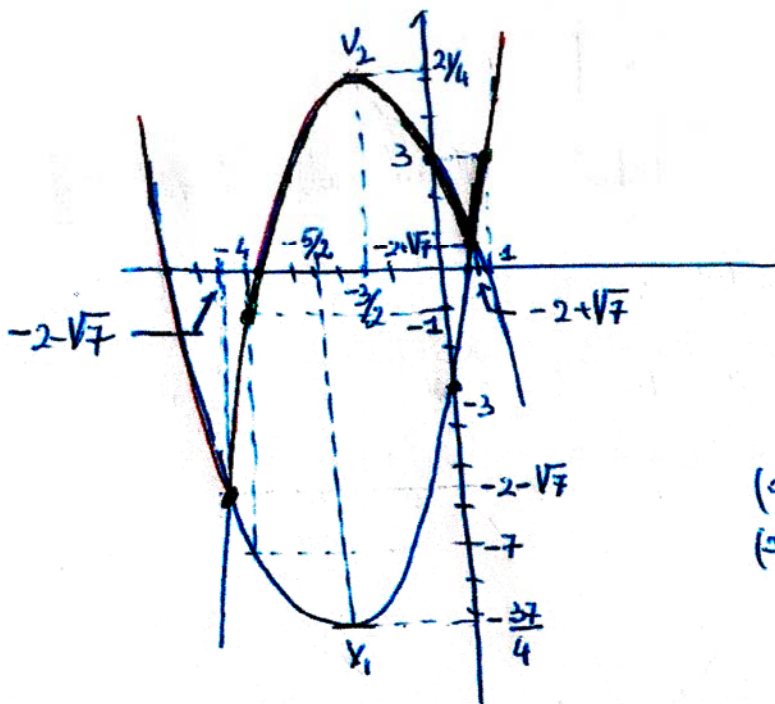
$$|x^2 + 6x - 3| = \begin{cases} x^2 + 6x - 3, & x \leq -2 - \sqrt{7} \cup x \geq -2 + \sqrt{7} \\ -x^2 - 6x + 3, & -2 - \sqrt{7} < x < -2 + \sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x - 3, & x \leq -2 - \sqrt{7} \cup x \geq -2 + \sqrt{7} \\ -x^2 - 3x + 3, & -2 - \sqrt{7} < x < -2 + \sqrt{7} \end{cases}$$

① $y = x^2 + 5x - 3$ Parabola $V\left(-\frac{5}{2}, -\frac{37}{4}\right)$

$x_v = -\frac{5}{2}$ $\vee a > 0$

$y_v = \frac{25}{4} - 5 \cdot \frac{5}{2} - 3 = -\frac{37}{4} (= -9.25)$



$$x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$\Delta = 25 + 12 = 37$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2} \approx \begin{matrix} 0,54 \\ -5,54 \end{matrix}$$

x	y
(-4)	(-7)
1	3
$(\approx -4,6)$	$-2 - \sqrt{7}$
$(\approx 0,65)$	$-2 + \sqrt{7}$

$$\begin{aligned} 4 + 7 + 4\sqrt{7} - 10 - 5\sqrt{7} - 3 &= -2 - \sqrt{7} \approx -4,65 \\ 4 + 7 - 4\sqrt{7} - 10 + 5\sqrt{7} - 3 &= -2 + \sqrt{7} \approx 0,65 \end{aligned}$$

② $y = -x^2 - 3x + 3$
 $V\left(-\frac{3}{2}; \frac{21}{4}\right)$

$$x_v = -\frac{-3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$y_v = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 3 = \frac{21}{4} = 5,25$$

$$-x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$\Delta = 9 + 12 = 21$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{-2} \begin{cases} \frac{3 + \sqrt{21}}{-2} \approx -3,8 \\ \frac{3 - \sqrt{21}}{-2} \approx 0,8 \end{cases}$$

Nell'intervallo $[-4, 1]$

il max assoluto si ha per $x = -\frac{3}{2}$

e vale $y = \frac{21}{4}$

il min assoluto si ha per $x = -4$ e vale $y = -1$.

x	y
-4	-1
$-2 - \sqrt{7}$	$-4 - 7 - 4\sqrt{7} + 6 + 3\sqrt{7} + 3 = -2 - \sqrt{7} \approx -4,65$
$-2 + \sqrt{7}$	$-4 - 7 + 4\sqrt{7} + 6 - 3\sqrt{7} + 3 = -2 + \sqrt{7} \approx 0,65$

Es n° 86 (Esercizio)

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(x) = -x^2 + 6x + \lambda$$

Si determini λ in modo

che $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1]$

Si tratta di una parabola

con concavità rivolta verso il basso 

e vertice nel pt $x = -\frac{b}{a} = +3$

$$\Rightarrow \text{Inf } f = (-\infty, f(3)]$$

Deve essere $f(3) = 1$

$$-9 + 18 + \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = -8$$

Eg. n 169 (Esercizio)

$I_{\text{inf}} = ?$

$$f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$$

a) $f(x) = \log_2 x + 5^x + 3x$



Si tratta di funtz. crescenti

$\Rightarrow$ Anche la loro somma è crescente

Inoltre funtz. continue

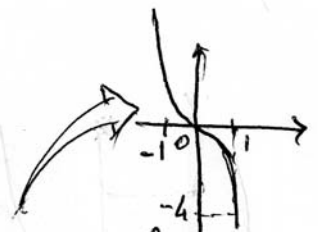
lince $f(x) = -\infty$
 $x \rightarrow 0^+$

$$f(4) = \log_2 4 + 5^4 + 3 \cdot 4 = 2 + 625 + 12 = 639$$

$$I_{\text{inf}} f = (-\infty, 639]$$

b) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = -4x^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



$y = -4x^3$ f. decres.

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ f. decr.

$$I_{\text{inf}} f = [f(1); f(0)] =$$

$$= \left[-4 + \frac{1}{2}; 1\right] = \left[-\frac{7}{2}; 1\right]$$

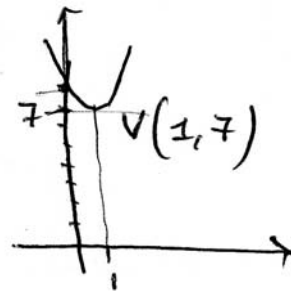
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \log_3(x^2 - 2x + 8)$$

$y = x^2 - 2x + 8$ Parabola

$$x_v = -\frac{-2}{2} = +1$$

$$y_v = 1 - 2 + 8 = 7$$



L'argomento è sicuramente ≥ 7 e il min si ha per $x=1$
 la funt. $\log_3$ è una funt. crescente

$$\Rightarrow \text{Im} f = \left[f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \log_3(7) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{Im} f = [\log_3 7; +\infty)$$

d) $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 6x + 48}$
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$y = -x^2 + 6x + 48 \rightarrow$ Parab

$$x_v = -\frac{6}{-2} = +3$$

$$y_v = 52$$

$y(3, 52)$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$$

$$\max f(x) = f(3) = \sqrt[3]{52}$$

$$\text{Im} f = (-\infty; \sqrt[3]{52})$$

Esercizio: (compito 17/6/14)

$$b) f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , x \in [-1, 1) \\ -3x^2+7x-1 & , x \in [1, 2] \end{cases}$$

(i) Verifichiamo che f è continua in $[-1, 2]$

Le 2 funzioni polinomiali sono continue

$\Rightarrow$ basta controllare che $f(x)$ sia continua per $x=1$.

$$f(1) = -3 + 7 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-3x^2 + 7x - 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 3$$

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)}_{\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)} \Rightarrow \text{la funzione è continua nel pt } x=1.$$

(ii) Verifichiamo che f è derivabile in $(-1, 2)$

controllando che lo sia nel pt $x=1$.

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\overset{(<1)}{1+h}) - \overset{(<3)}{f(1)}}{h} = \overset{(<0)}{\underset{(0^-)}{(1+h < 1)}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{[(1+h)+2] - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'_+(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{f(1+h)}^{(+2)} - \overbrace{f(1)}^{(-3)}}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[-3(1+h)^2 + 7(1+h) - 1] - 3}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-3(1+h^2+2h) + 7+7h - 1 - 3}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{-3} - 3h^2 - 6h + \cancel{7} + 7h - \cancel{1} - \cancel{3}}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-3h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{h}(-3h+1)}{\cancel{h}} = 1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'_+(1) = f'_-(1) = 1 \quad \Rightarrow f' \text{ derivabile per } x=1$$

(iii)
 $\rightarrow f'$ continua in $[-1, 2]$
 f' derivabile in $(-1, 2)$

$$\begin{aligned}
 \text{Inoltre } f(-1) &= -1 + 2 = 1 \\
 f(2) &= -3 \cdot 4 + 7 \cdot 2 - 1 = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} f(-1) = f(2) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Sono verificate le tp del teor. di Rolle

$$\Rightarrow \exists c \in (-1, 2) \text{ t.c. } f'(c) = 0.$$

CRITERIO di derivabilità

Sia $f(x)$ è continua in $[a, b]$ e derivabile
in $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, dove $x_0 \in (a, b)$.

Se nel pt x_0 risulta: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \ell$

$\Rightarrow f(x)$ è derivabile in x_0
e risulta $f'(x_0) = \ell$.

Attenzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\sin x^2} & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ \sqrt{x^3 + 1} & , x > 0 \end{cases} \quad \text{è derivabile in } x_0 = 0 ?$$

$f(x)$ è derivabile sia in $\mathbb{R}^+$ che in $\mathbb{R}^-$ perché
composizione di funz. derivabili

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos x^2 e^{\sin x^2} & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} & , x > 0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x \cos x^2 e^{\sin x^2} = 0$$

> per il criterio
di derivabilità

la funz. è
derivabile in $x_0 = 0$

... INVECE NO !!!

Il criterio non poteva essere applicato perché $f(x)$ non è continua in $x_0 = 0$.

$$\text{Infatti: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\sin x^2} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^3 + 1} = 1$$

ma $f(0) = 0 \Rightarrow$ Si ha un pt di discontinuità di III specie

L'errore non si sarebbe compiuto se si fosse verificata la derivabilità usando la definizione, in base al limite del rapporto incrementale:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h^3 + 1}}{h} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{\sin h^2}}{h} = -\infty$$

La funzione
$$g(x) = \begin{cases} e^{-\sin x^2} & , x \leq 0 \\ \sqrt{x^3 + 1} & , x > 0 \end{cases}$$
 è invece continua e derivabile in $x=0$

$$g'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h^3 + 1} - 1}{h} \stackrel{(H)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h^2}{2\sqrt{h^3 + 1}} = 0$$

$$g'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{\sin h^2} - 1}{h} \stackrel{(H)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} e^{\sin h^2} \cdot \cos h^2 \cdot 2h = 0 \quad \left| \begin{array}{l} g'_+(0) = g'_-(0) \end{array} \right.$$

$$\text{Inoltre: } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1 = g(0)$$