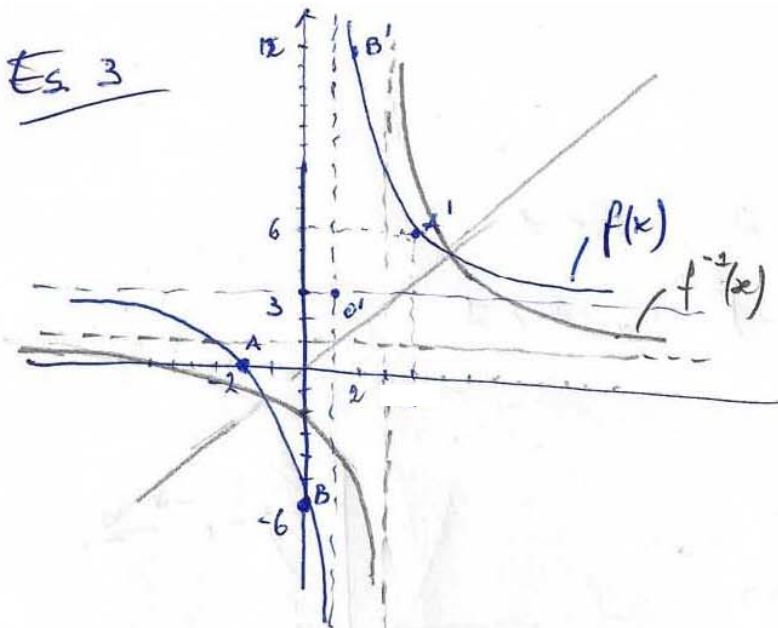


Es. 3



$$D: \mathbb{R} \setminus \{1\} ; I: \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$f: D \rightarrow I$$

$$f^{-1}: I \rightarrow D$$

$$y = \frac{3x+6}{x-1}$$

$$y(x-1) = 3x+6$$

$$xy - y = 3x+6$$

$$x(y-3) = y+6$$

$$x = \frac{y+6}{y-3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+6}{x-3}$$

(Simmm. di $f(x)$
rispetto alla bisettrice)
 $I \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $y=x$)

$$y = \frac{3x+6}{x-1}$$

funz. omografica

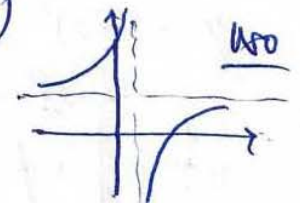
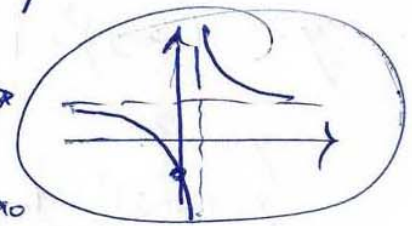
$$\text{Asintoti: } \left(y = \frac{ax+b}{cx+d} \right)$$

$$\begin{cases} x = -d/c \\ y = a/c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 & \text{As. vert} \\ y &= 3 & \text{As. orizz} \end{aligned}$$

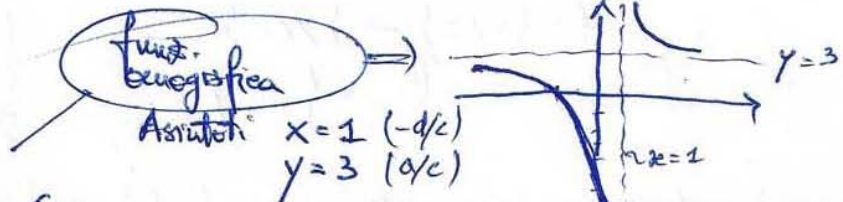
Basta
considerare
1 pt (esempio
l'interc. con asse y)

$$y = -6 < 0 !!$$



Funz. Omografica
con asintoti $x=3$
 $y=1$

Es 3 fila A



1) $f(x) = \frac{3x+6}{x-1}$

Domínio: $x \neq 1$

Studio del comportamento della funz. agli estremi del C.E.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+6}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3 \Rightarrow y=3$$

eq. Asint. Orizz.

$$\lim_{x \rightarrow 1^{\pm}} \frac{3x+6}{x-1} = \frac{9}{0^{\pm}} = \pm \infty \Rightarrow x=1$$

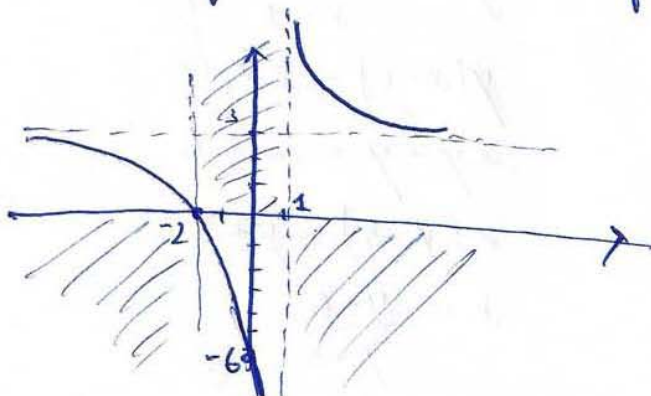
eq. Asint. Vert.

Studio della monotonia e ricerca dei pt. stazionari

$$y' = \frac{3(x-1) - (3x+6)}{(x-1)^2} = \frac{3x-3-3x-6}{(x-1)^2} = \frac{-9}{(x-1)^2}$$

$y' = 0$ non ha soluzioni $\Rightarrow$ Non ci sono pt. staz.

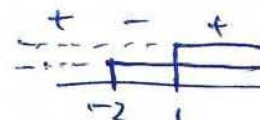
$y' < 0$ Sempre $\forall x \in D \Rightarrow f(x)$ sempre decrescente



St. Segno $f(x) > 0$

$$N > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$D > 0 \Rightarrow x > 1$$



$$f: \{x \neq 1\} \rightarrow \{y \neq 3\}$$

$$2) \text{ Inf } : \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Una $\neq$ retta orizz. interseca il graf. in 1 solo pt.
 $\Rightarrow$ Quindi ogni elem. di B è immagine di ≤ 1 solo elem. di $A \Rightarrow f$ è biunivoca

3) La funt. è iniettiva (dal graf.)
Opp. (dalla def.) f è iniettiva se porta elem. distinti di A in elem. dist. di B .

$$\Rightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$$

$$\text{Opp. } y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

ovvero se ogni elem. di B è immagine al più di 1 elem. di A .

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{3x_1 + 6}{x_1 - 1} = \frac{3x_2 + 6}{x_2 - 1}$$

$$(3x_1 + 6)(x_2 - 1) = (3x_2 + 6)(x_1 - 1)$$

$$\cancel{3x_1x_2} - 3x_1 + 6x_2 - 6 = \cancel{3x_1x_2} - 3x_2 + 6x_1 - 6$$

$$- 3x_1 = - 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Opp. essendo $y' < 0$

f è iniettiva

$\Rightarrow f(x)$ è sempre decrescente strettamente

$$\text{Se } x \neq y \ (x < y) \Rightarrow f(x) \neq f(y) \ (f(x) > f(y))$$

La funt. è invertibile!

$$f: D \rightarrow I$$

$$f^{-1}: I \rightarrow D$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+6}{x-3}$$

$$y = \frac{3x+6}{x-1}$$

$$y(x-1) = 3x+6$$

$$xy - y = 3x + 6$$

$$x(y-3) = y+6$$

$$x = \frac{y+6}{y-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\ln 3x} \right)^{-\ln x} = 1^\infty$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\ln x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{\ln 3x} \right) \right]}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'Hôpital: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln 3x} = \\ \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3x}} = 1 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln \left(\frac{\ln x}{\ln 3x} \right)}{\frac{1}{\ln x}} \right] \stackrel{(H)}{=} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln 3x}{\ln x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \ln 3x - \frac{3 \ln x}{3x}}{\ln^2 3x}}{\frac{-1/x}{\ln^2 x}} =$$

$$= + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\ln 3x} \cdot (3 \ln 3x - 3 \ln x)}{3 \cancel{x} \ln^2 3x} \cdot \cancel{x} \ln^2 x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 (\ln 3x - \ln x) \cdot \ln x}{3 \ln 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3x \cdot \ln x}{\ln 3x}$$

$$= \ln 3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln 3x} \stackrel{(H)}{=} \ln 3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3x}} = \ln 3$$

$$\Rightarrow e^{\ln 3} = \textcircled{3}$$

Opp

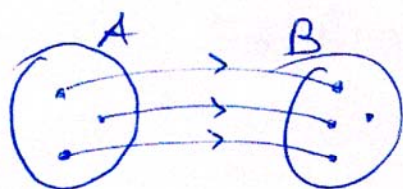
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\ln 3x} \right)^{-\ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\ln 3x} - 1 \right) (-\ln x)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x - \ln 3x}{\ln 3x} \cdot \ln x \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \frac{3x}{x} \cdot \ln x}{\ln 3x} \right)} =$$

$$= e^{\ln 3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\ln 3x} \right)} \stackrel{(H)}{=} e^{\ln 3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3x}}} = e^{\ln 3} = 3,$$

Def

- Dati 2 insiemi A e B
una funzione è una legge di natura qualsiasi
che associa ad ogni elemento di A 1 e 1 solo
elemento di B .
- Una funz. $f: A \rightarrow B$ si dice INIETTIVA
se porta elementi distinti di A in elem. distinti
di B .



↓
Ogni elem. di B è
immagine di al più
un elem. di A

↙
Non si esclude che in B possano esserci
elementi che non risultano essere
l'immagine di alcun elem. di A .

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{con } f_1(x) = 5x^2$$

Non è iniettiva

$$\text{Es: } \begin{matrix} x = +1 \\ x = -1 \end{matrix} \left\} f_1(x) = +5$$

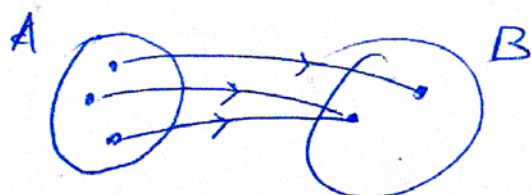
$$- \quad f: A \rightarrow B$$

||
Domínio

L'insieme delle immagini
 $f(A)$ è il CODOMINIO.

$$f \text{ è iniettiva se } \forall x_1, x_2 \in D \text{ con } x_1 \neq x_2 \Rightarrow \begin{matrix} f(x_1) \neq f(x_2) \\ y_1 \neq y_2 \end{matrix}$$

- Una funz. $f: A \rightarrow B$ si dice **SURIETTIVA** quando ogni elem. di B è immagine di **ALMENO 1** elem. di A .



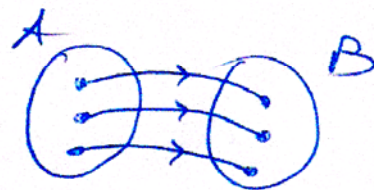
$$\Downarrow$$

$$f(A) = B$$

Il Im insieme (B)
coincide con il codominio

- Una funz. $f: A \rightarrow B$ si dice **BIUNIVOCA** o **BIETTIVA** se è suriettiva e iniettiva

$\Rightarrow$ Ad ogni elem. di A corrisponde 1 e 1 solo elem. di B e viceversa
ogni elem. di B è il corrispondente di 1 e 1 solo elem. di A



$$\swarrow f(A) = B \quad (\text{suriettiva})$$

$$\searrow \text{da } x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \quad (\text{iniettiva})$$

Una funzione è invertibile se e solo se è biunivoca.

Il grafico della funzione inversa $f^{-1}(x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III Quadrante ($y = x$).

$$f: A \rightarrow B$$

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

Per dimostr. che f è invertibile
dovrei dimostrare che f è biunivoca

→ iniettiva
→ suriettiva

oppure studio la monotonia
della funzione

Teor:
Una funz. strettamente
monotona è invertibile
(Inoltre la sua inversa
è ancora strettamente
monotona).

Per dimostrare che f è iniettiva possiamo sfruttare la defniz.
Diveno, $f(x)$ è iniettiva se porta elementi distinti del I
insieme in elem. distinti del II .

$$\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\text{Oppure } y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{implica}$$

- f invertibile $\rightarrow f^{-1}$ = funz. inversa della f
Data $f: A \rightarrow B$
 $f^{-1}: B \rightarrow A$ ed è t.c. $f^{-1} \circ f = I_A = \text{f. identità, ad ogni elem. di } A \text{ associa l'elemento stesso.}$
 $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$
 $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B$

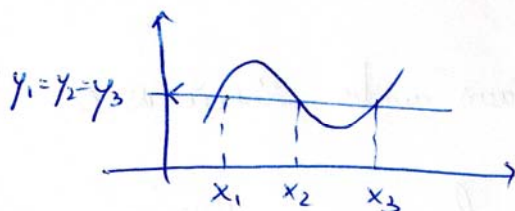
Grafico di una funzione:

$$G(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathcal{D}(f) \text{ et } y = f(x) \}$$

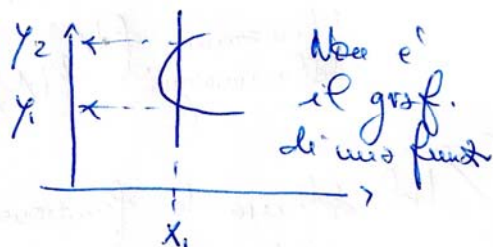
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ "prodotto cartesiano"

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

$$\text{Se } (x, y_1) \text{ e } (x, y_2) \in G(f) \Rightarrow y_1 = y_2$$



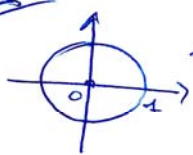
(Es: Circenf.
Parab. con asse // x)



Criterio della retta verticale

↓
Deve intersecare il graf. in al più un punto.

Es



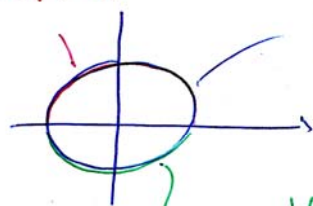
Circenf. di centro $O(0,0)$ e $r=1$

$$\rightarrow \text{Equazione: } x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2}$$



Non e' il graf. di 1 funzione!
Si tratta infatti di 2 funzioni!

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

Dal compito 16/1/13 Es1 - fila B

Si dimostri che è iniettiva, usando la definizione di infettività.
Si calcoli $\text{Im}(f)$ e si determini l'espressione esplicita della funzione inversa.

$$x \rightarrow \ln(x^2 + 2x + 3)$$

$$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

È iniettiva se dati $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$

Oppure $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ *implica*

$$y_1 = y_2$$

$$\ln(x_1^2 + 2x_1 + 3) = \ln(x_2^2 + 2x_2 + 3)$$

$$x_1^2 + 2x_1 + \cancel{3} = x_2^2 + 2x_2 + \cancel{3}$$

$$\left(x_1(x_1 + 2) = x_2(x_2 + 2) \right)$$

$$\downarrow x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(-x_2^2 - 2x_2) = 4 + 4x_2^2 + 8x_2 = 4x_2^2 + 8x_2 + 4 = (2x_2 + 2)^2$$

$$\textcircled{x_1} = \frac{-2 \pm (2x_2 + 2)}{2} \quad \left\langle \quad \frac{-2 + 2x_2 + 2}{2} = \textcircled{x_2} \right.$$

$y_1 = y_2$ se e solo se
 $x_1 = x_2$

$\Rightarrow$ È iniettiva -

$$\frac{-2 - 2x_2 - 2}{2} = -x_2 - 2$$

Non Acc.

Per trovare l'immagine di $f(x)$ si studia l'andamento della funzione:

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$$

$$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

per $x=0 \Rightarrow f(0) = \ln 3$
 ≈ 1.0986

Domaine

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Int. l'asse $x \Rightarrow \ln(x^2 + 2x + 3) = 0$
 $x^2 + 2x + 3 = 1 \rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 2 < 0$$

No solut.!

$$\ln(x^2 + 2x + 3) > 0$$

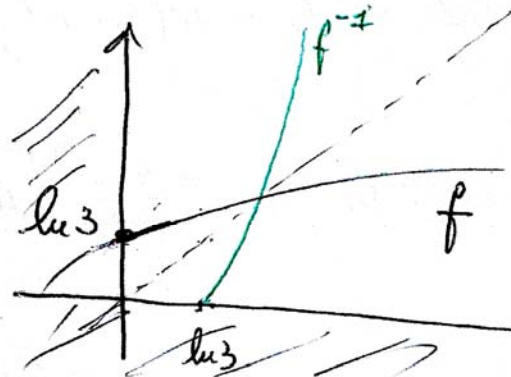
$$x^2 + 2x + 3 > 1$$

$$x^2 + 2x + 2 > 0$$

$$a > 0$$

$$\Delta < 0$$

Sempre!



$$f' = \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \cdot (2x + 2) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3}$$

$$f' = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

All'interno del Dominio
 $\rightarrow$ MAI

$\Rightarrow$ No pt Stazion.

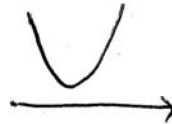
$$y' > 0$$

↓

$$N) 2x+2 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$D) x^2+2x+3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Delta_4 = 1-3 < 0$$



} All'interno del dominio, ovvero per $x \geq 0$,

↓

$y' > 0$ Sempre

↓

$f(x)$ sempre strettamente crescente

↓

monotona

↓

invertibile.

per $x=0$

$y' = 2/3 \leftarrow$ coeff. ang della retta tg nel pt $(0; \ln 3)$

$$\text{Im} f : [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$$

$$\text{Im} f = [\ln 3; +\infty)$$

$$f : [0; +\infty) \rightarrow [\ln 3; +\infty)$$

È iniettiva e suriettiva, ovvero biunivoca, quindi invertibile e:

$$f^{-1} : [\ln 3; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$$

Per trovare l'espressione esplicita della funzione inversa:

- 1) Si ricava x in funzione di y
- 2) Si scambia la x con la y

Si ricava x in funzione di y :

$$y = \ln(x^2 + 2x + 3)$$

$$e^y = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 - e^y = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(3 - e^y) = 4 - 12 + 4e^y = 4e^y - 8$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4(e^y - 2)}}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-2 + 2\sqrt{e^y - 2}}{2} = -1 + \sqrt{e^y - 2} \\ \frac{-2 - 2\sqrt{e^y - 2}}{2} = -1 - \sqrt{e^y - 2} \end{cases}$$

$$f^{-1}: y \rightarrow -1 + \sqrt{e^y - 2}$$

Si scambia la x con la y :

$$f^{-1}: y = -1 + \sqrt{e^x - 2}$$

$$f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{e^x - 2}$$

Es Studio di funz. (complete)

$$y = \ln(x^2 + 2x + 3)$$

1) Dominio (o C.E.) $\Rightarrow x^2 + 2x + 3 > 0$

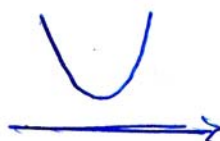
$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 1 - 3 = -2$$

$$\Delta < 0!!$$

$\downarrow$

$$D = \mathbb{R}$$

(a>0)



La parabola non interseca l'asse x

Il trinomio è sempre positivo.

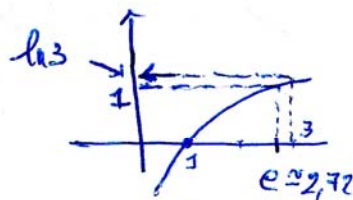
$$x^2 + 2x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2) $f(-x) = \ln(x^2 - 2x + 3) \neq f(x)$

$$\neq -f(x)$$

Ne è pari
Ne è dispari

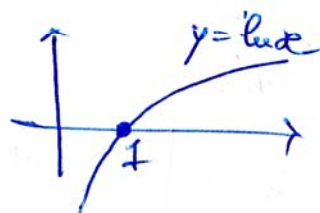
3) Inters. asse



•) Int. asse $y \Rightarrow y = \ln 3 \approx 1,0986$
($x=0$)

•) Int. asse $x \Rightarrow \ln(x^2 - 2x + 3) = 0$
($y=0$)

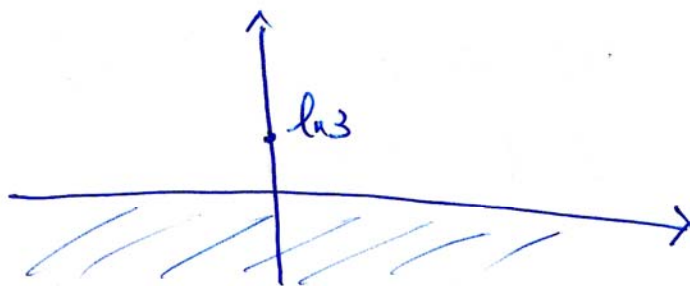
$$\Downarrow \quad \boxed{\text{quando ARGOM.} = 1}$$



$$x^2 - 2x + 3 = 1$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \quad \text{imposs.}$$

$$\Delta < 0 \quad (\text{è il falso quadrato!})$$



4) Seguo di $f(x)$

$$\ln(x^2 + 2x + 3) > 0 \Rightarrow \boxed{\text{Argomento} > 1}$$

$$x^2 + 2x + 3 > 1$$

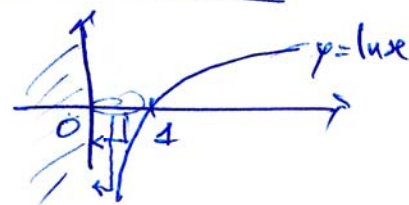
$$x^2 + 2x + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Delta < 0$$

$$a > 0$$



La funz. è
sempre positiva.



5) Studio del comportamento
della funz. agli estremi del C.E.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 2x + 3) = +\infty$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \\ +\infty & +\infty & = \ln(+\infty) \end{array}$$

Può esserci
un asintoto obl.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 2x + 3) =$$

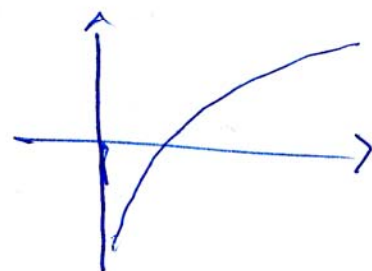
$$= \ln \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x + 3) \right] =$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \\ +\infty & -\infty & \text{f.ind. ?} \end{array}$$

$$= \ln \left\{ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) \right] \right\} = +\infty$$

$$\begin{array}{l} +\infty \cdot 1 = +\infty \\ \nearrow \ln(+\infty) \rightarrow +\infty \end{array}$$

Può esserci
As. obl.



6) Ricerca dell'eventuale asint. obliquo
di equat. $y = mx + q$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(x^2 + 2x + 3)}{x}$$

$$= 0$$

perché cresce
più rapidamente
il Denominatore

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] =$$

(11)
(0)

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \text{Non c'è l'asint. obl.}$$

(già fatto)

7) Ricerca pt stazionari $\rightarrow y' = 0$
e studio della monotonia $\rightarrow y' > 0$

$$y' = \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \cdot (2x + 2) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3} =$$

$$D[\ln(f(x))] = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 3}$$

funzione
composta.

$$y' = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+3}$$

$$\frac{\text{Num}}{\text{Den}} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\text{Num} = 0$$

$$y' = 0 \Rightarrow x+1 = 0$$

$$x = -1 \rightarrow \text{pt Stationario}$$

(?) $\begin{cases} \nearrow \text{max rel} \\ \searrow \text{min rel} \\ \text{fl. a tg. orizz} \end{cases}$

$$y' > 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{2(x+1)}{x^2+2x+3} > 0$$

Diseg. fraz.

$\Rightarrow$ Si studia il segno del Num e del Denom.

$$\text{Num} > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$\text{Den} > 0 \Rightarrow x^2+2x+3 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

(già studiato qual
abbiamo trovato il Denom.)

Essendo il Denom. sempre positivo
la frazione è positiva se lo è il Num.

$$\Rightarrow \text{per } x > -1$$

La funz. è crescente
per $x > -1$

Per $x = -1$ si ha
un MINIMO

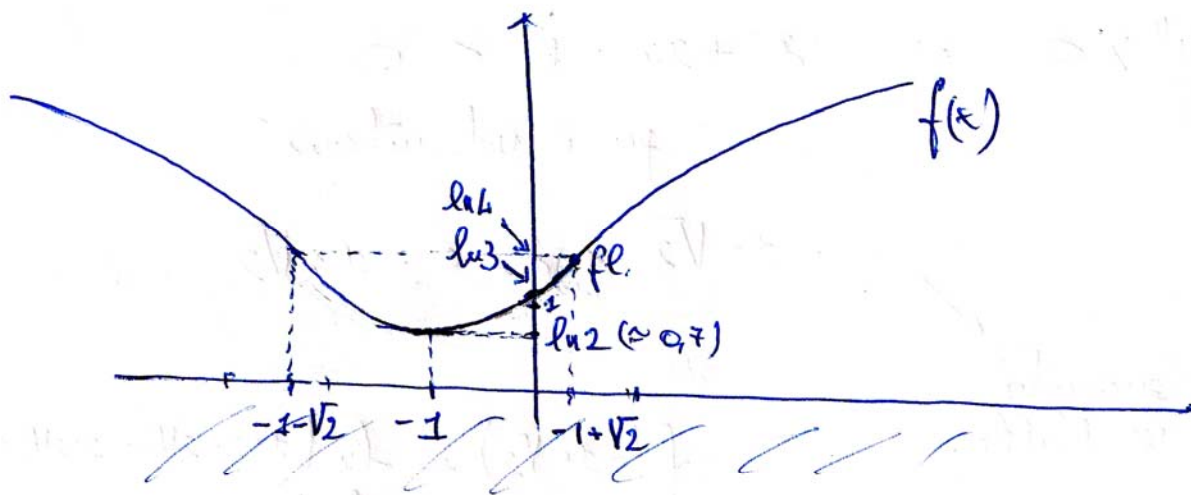
$$f(-1) = \ln 2 \Rightarrow (-1; \ln 2) \text{ è il pt di } \underline{\underline{\text{min}}}$$



Tafel:

	-	(+)
D)	+	+
N)	-	+

-1



8) Calcolata y'' $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$y'' = \frac{2(x^2 + 2x + 3) - (2x + 2)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 3)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 4x + 6 - (2x + 2)^2}{(x^2 + 2x + 3)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 4x + 6 - 4x^2 - 4 - 8x}{(x^2 + 2x + 3)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 - 4x + 2}{(x^2 + 2x + 3)^2} = -2 \cdot \frac{(x^2 + 2x - 1)}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 1 = 2 \Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2} \text{ punti di flesso.}$$

$$y'' > 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 < 0$$

per i val. interni

$$\underbrace{-1-\sqrt{2}}_{\approx -2,41} < x < \underbrace{-1+\sqrt{2}}_{\approx +0,41}$$

Concavità
vs l'alto.

$$f(-1+\sqrt{2}) = \ln(1+2-2\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}+3) = \ln 4$$

9) È simmetrica rispetto alla retta $x = -1$?

Se $f(x+k) = f(-x+k)$
una funz. è simm. risp.
alla retta $x = k$

$$f(x-1) \stackrel{?}{=} f(-x-1)$$

$$\begin{aligned} f(x-1) &= \ln[(x-1)^2 + 2(x-1) + 3] = \\ &= \ln(x^2 - \cancel{2x} + 1 + \cancel{2x} - 2 + 3) = \ln(x^2 + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-x-1) &= \ln[(-x-1)^2 + 2(-x-1) + 3] = \\ &= \ln(x^2 + \cancel{2x} + 1 - \cancel{2x} - 2 + 3) = \\ &= \ln(x^2 + 2) \end{aligned}$$

← Sì

10) La funzione non è iniettiva $\Rightarrow$ Non è invertibile

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [\ln 2, +\infty)$$

$\updownarrow$
Inv. f

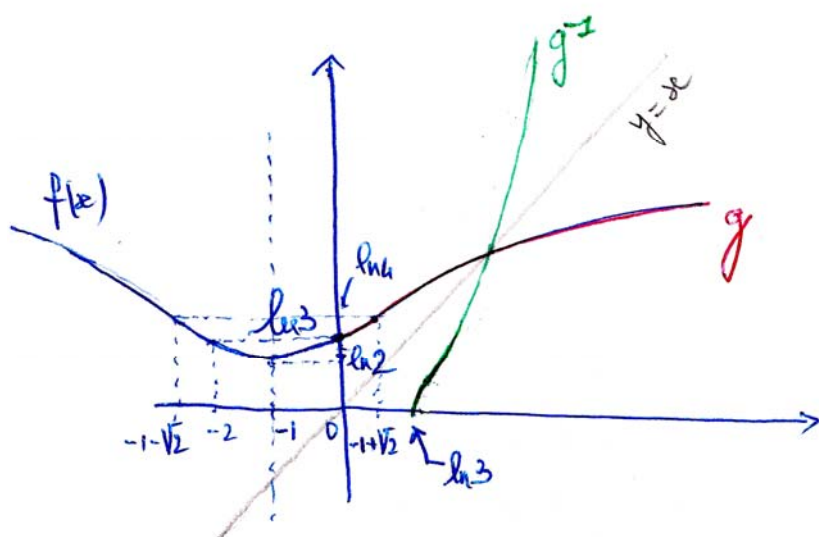
Se considerassi la RESTRIZIONE di $f(x)$ a $[0, +\infty)$
 otterrei la funzione $g: [0, +\infty) \rightarrow [\ln 3, +\infty)$

$$x \rightarrow \ln(x^2 + 2x + 3)$$

(V. Computo
 16/1/13 - fl. B)

In tale dominio
 essa risulta
 INIETTIVA

e INVERTIBILE
 $\exists g^{-1}$



$$g: [0, +\infty) \rightarrow [\ln 3, +\infty)$$

$$x \rightarrow \ln(x^2 + 2x + 3)$$

è iniettiva
 è suriettiva

↓

è biunivoca $\Rightarrow$ è invertibile

$$g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \ln(x^2 + 2x + 3)$$

è iniettiva
 ma non è suriettiva
 perché $\text{Cod.} \subset \mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ Ci sono elem. del $\mathbb{R}$ ins.
 che non sono immagine
 di alcun elemento del $\mathbb{I}$.
 } Non è biunivoca

Es Dominio o Campo di Esistenza

1) funzione polinomiale

Es $y = x^3 + 5x^2 + x - 3$ $D: \mathbb{R}$

2) funz. fraz. $y = \frac{\text{Num.}}{\text{Den.}}$

Condizione $\rightarrow$ Deve essere: $\boxed{\text{Denom.} \neq 0}$

Es $y = \frac{x^3 + 5x^2 + x - 3}{x^2 - 9}$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

!!

$$\Rightarrow D: \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$$

$$x \neq \pm 3$$

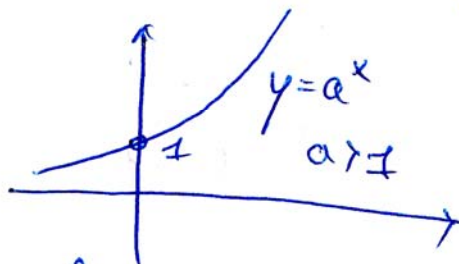
3) Funz. irrazionale $y = \sqrt[n]{\text{Radicando}}$

Se n è pari $\Rightarrow \boxed{\text{Radicando} \geq 0}$

Se n è dispari $\Rightarrow D: \mathbb{R}$

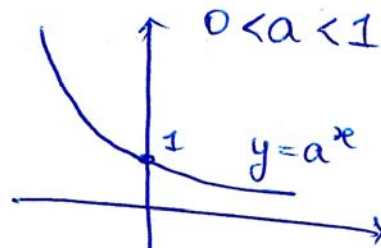
Es $\sqrt{-4}$ non esiste ; $\sqrt[3]{-8} = -2$ ($(-2)^3 = -8$)

4) Funz. esponenziale $y = a^x \rightarrow D: \mathbb{R}$



funz. crescente

Es. $y = 2^x$
 $y = e^x$



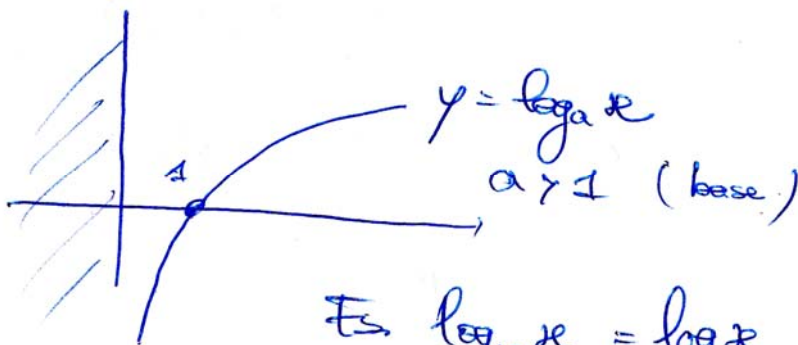
funz. decrescente

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

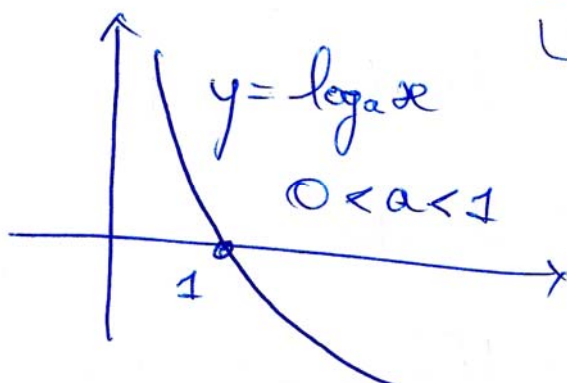
$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

5) funz. logaritmica $y = \log_a x \rightarrow D: x > 0$

Argomento > 0



Es. $\log_{10} x = \log x \rightarrow \log x$
 $\ln x \rightarrow \log x$



$0 < a < 1$

(Es. $\log_{1/3} x$)

base $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2.71828$

Costante di Nepero.

ASINTOTI

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Rightarrow$ la retta $x = x_0$
è Asintoto Verticale

Se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \Rightarrow$ la retta $y = l$
è Asint. Orizzontale

Se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Può essere un Asint. Obl.

di equazione $y = mx + q$

se esistono, finiti, entrambi i limiti

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

Ricerca dei pt stazionari.

$$\rightarrow y' = 0$$

e studio della monotonia

$\rightarrow$ Seguo di y'

Pt stazionari:

Pt. in cui la
tangente alla
curva è orizz.!!

Se $y' > 0$ $f(x)$ è crescente
Se $y' < 0$ $f(x)$ è decrescente

max rel



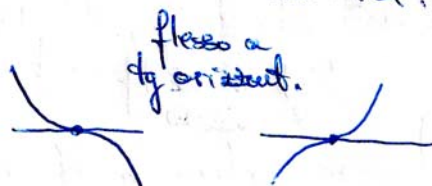
min rel



flessa a tg orizzontale



Oss. i quando si cercano i pt stazionari si cercano
i pt in cui $y' = 0 \Rightarrow$ ovvero quei pt in cui
la tg alla curva ha
coeff. angolare $m = 0$
 $\Rightarrow$ è orizzontale.



Oss. Punti in cui non esiste la derivata prima:

$\rightarrow$ punti angolosi $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$



$\rightarrow$ cuspidi

vs l'alto

$$f'_+(x_0) = +\infty$$

$$f'_-(x_0) = -\infty$$



$$f'_+(x_0) = -\infty$$

$$f'_-(x_0) = +\infty$$



$\rightarrow$ flesso a tangente verticale

ascendente:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = +\infty$$

discendente:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = -\infty$$

Teor.

Se $f(x)$ è derivabile in $x_0 \Rightarrow$ è continua

$\Leftarrow$

Condiz. Necessaria perché una funt. sia derivabile è che sia continua!
ma non Suff.

PUNTI CRITICI

Pt STAZIONARI $y' = 0$

ESTREMITÀ RELATIVE

max
relativo

min
rel

FLESSO A TANG. ORIZZ.



Pt. in cui NON
esiste la DERIVATA PRIMA

pt ANGOLOSI

$$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$$

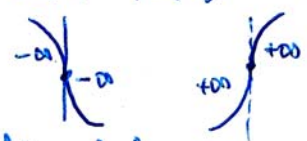


si tratta di pt angolosi
anche se una delle 2
deriv. è ∞ .

FLESSO a TG VERTICALE

ascendente:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = +\infty$$



discendente

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = -\infty$$

CUSPIDE

vs l'alto

vs il basso



$$f'_-(x_0) = +\infty$$

$$f'_+(x_0) = -\infty$$

$$f'_-(x_0) = -\infty$$

$$f'_+(x_0) = +\infty$$