

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\tan^2 x - x^2}{x^3} \right| \log(\cos x) =$$

Tagli svilupp
di Taylor
per $x \rightarrow 0$.

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\tan^2 x = \left[x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right]^2 =$$

$$\log(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$= x^2 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6) + \frac{2}{3}x^4 +$$

$$+ 2x o(x^3) + \frac{2}{3}x^3 o(x^3) =$$

$$= x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6) + o(x^4) =$$

$$= x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\downarrow$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^2 + \frac{2}{3}x^4 - x^2 + o(x^4)}{x^3} \right|^{-\frac{1}{2}x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{2}{3}x \right|^{-\frac{1}{2}x^2} \stackrel{(0^0)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) \cdot \ln \left| \frac{2}{3}x \right|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln \left| \frac{2}{3}x \right| = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln \left(\frac{2}{3}x \right) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln \left(-\frac{2}{3}x \right) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}x^2 \ln \left(\frac{2}{3}x \right) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(\frac{2}{3}x \right)}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{(\frac{-}{+})}{=}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{2x} \cdot \frac{2}{3}}{-\frac{2x}{x^4}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\frac{2}{x^3}} =$$

$$= +\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2} x^2 \ln\left(-\frac{2}{3}x\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2} \frac{\ln\left(-\frac{2}{3}x\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$\stackrel{(4)}{=} -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left(-\frac{5}{2x}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)}{-\frac{2}{x^3}} = +\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln\left|\frac{2}{3}x\right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\tan^2 x - x^2}{x^3} \right|^{\log(\cos x)} = e^0 = 1$$

Da fare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{\sin 2x}{\tan x}}_{=2} \cdot \underbrace{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}_{=\ln e^{1/2} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left| \frac{\tan^2 x - x^2}{x^3} \right|}_{=1 \text{ (v.es. precedente)}}^{\ln(\cos x)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{7x^2}{\cos 2x - 1} \right)}_{=\frac{7}{2}} \cdot \underbrace{\frac{x^2 + x + 3}{3x^2 - x + 7}}_{=\frac{3}{7}} + \frac{5}{6} \underbrace{\frac{\ln(1+3x)}{x}}_{=3} \right] = 5$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{x}{\tan x} \right) \cdot 2 = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \right] =$$

$$= \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$$

$$(*) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{\frac{y}{2}} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^{\frac{1}{2}} =$$

Cambio di variabile:

$$y = \frac{2}{x} \quad \text{Se } x \rightarrow 0 \quad y \rightarrow \infty$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{2}$$

$$= e^{\frac{1}{2}}$$

ricorda che: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(- \frac{7x^2}{\cos 2x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7x^2}{1 - \cos 2x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{4} \cdot \frac{4x^2}{1 - \cos 2x} = \frac{7}{4} \cdot 2 = \frac{7}{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+3x)}{3x} \right) \cdot 3 = 3$$

(b) Il modo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{2} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2} \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Es Mediante gli sviluppi di Taylor calcolare un' approssimazione di:

$$\sqrt{1,07} ; \ln(1,04) ; e^{0,2} ; \frac{1}{1,02}$$

Ricordo che:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + R_2(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + R_2(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + R_2(x)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1,07} = (1,07)^{\frac{1}{2}} = (1+0,07)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,07 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} \cdot 0,07^2 + R_2(x)$$

$$e^{0,2} = 1 + 0,2 + \frac{1}{2} \cdot 0,2^2 + R_2(x)$$

$$\ln(1,04) = \ln(1+0,04) = 0,04 - \frac{1}{2} 0,04^2 + R_2(x)$$

$$\frac{1}{1,02} = 1,02^{-1} = (1+0,02)^{-1} = 1 - 0,02 + \frac{-1 \cdot (-2)}{2} \cdot 0,02^2 + R_2(x)$$

$$= 1 - 0,02 + 0,02^2 + R_2(x)$$

$f(x) = \ln(x^2 + e) \rightarrow$ Sviluppo di Taylor
arrestato al II ordine

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2!} + R_2(x)$$

$$f(0) = \ln e = 1$$

$$\text{dove } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + e} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + e}$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + e) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + e)^2} = \frac{2x^2 + 2e - 4x^2}{(x^2 + e)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 2e}{(x^2 + e)^2} = \frac{2(e - x^2)}{(x^2 + e)^2}$$

$$f''(0) = \frac{2e}{e^2} = \frac{2}{e}$$

$$\Rightarrow \ln(x^2 + e) = 1 + \frac{x}{e} \cdot \frac{x^2}{2} + R_2(x)$$

$$\boxed{\ln(x^2 + e) = 1 + \frac{x^2}{e} + R_2(x)}$$

$$\text{Calcolare: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e) - 1}{x^2} \quad \left(= \frac{0}{0} \right)$$

$$\stackrel{(\text{Taylor})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^2}{e} - 1 + R_2(x)}{x^2} =$$

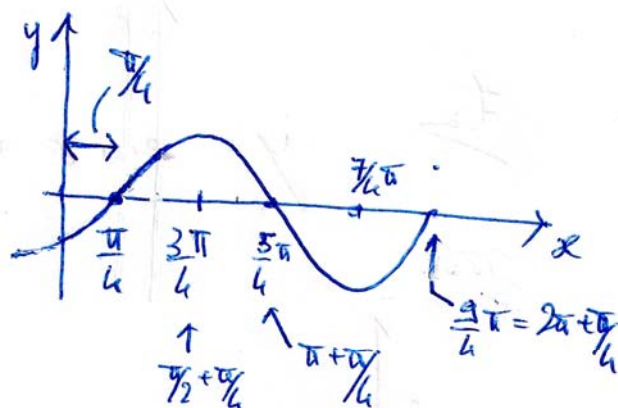
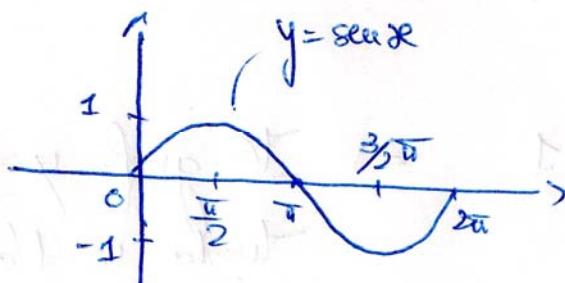
$$= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/e}{x^2}}_{= 1/e} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_2(x)}{x^2}}_{= 0} = 1/e$$

Tecniche di rappresentazione grafica

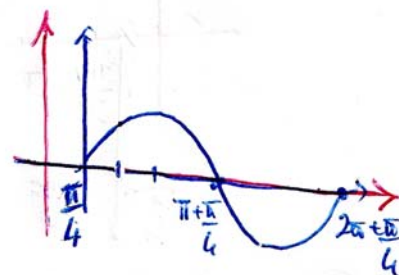
① $f(x-h) \rightarrow$ Si ottiene traslando il grafico di $f(x)$

$\rightarrow$ vs dx se $h > 0$
 $\rightarrow$ vs sin se $h < 0$

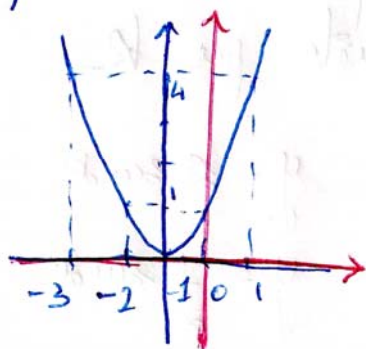
Es $y = \sin(x - \pi/4)$, $h = \pi/4 (> 0) \Rightarrow$ vs dx



oss ovvero basta
 traslare l'asse vs sin di $\pi/4$



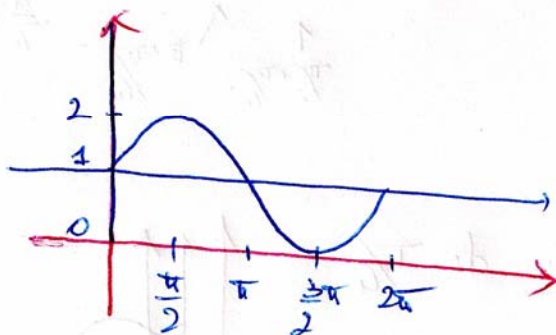
$y = (x+1)^2$ $h < 0$
 $\Rightarrow$ Traslò il graf. vs sin di 1
 (oppure traslò l'asse y vs dx)



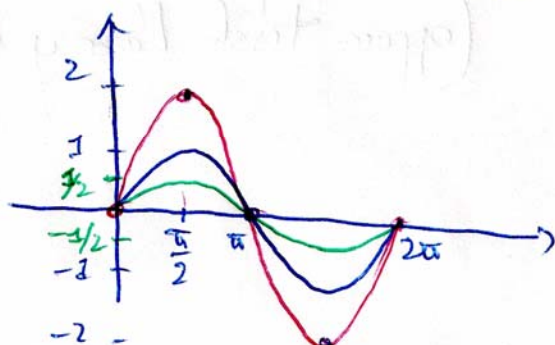
② $f(x) + k$

- traslo il grafico di $|k|$
 - vs l'alto se $k > 0$
 - vs il basso se $k < 0$
- oppure traslo l'asse x
 - vs il basso se $k > 0$
 - vs l'alto se $k < 0$

Es $y = \sin x + 1 \Rightarrow$ Il graf. $y = \sin x$ trasla vs l'alto di 1.



③ $k f(x)$ Basta moltiplicare tutte le ordinate per k



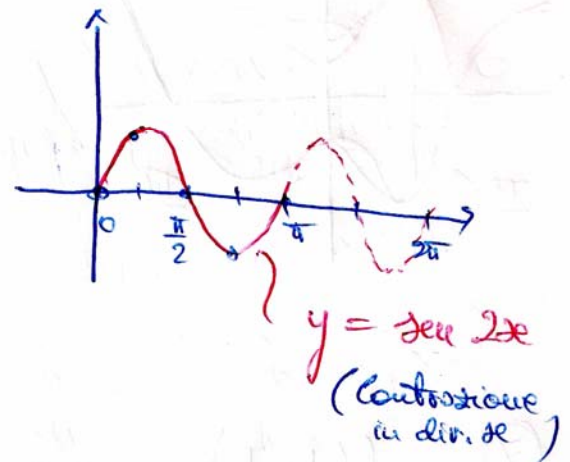
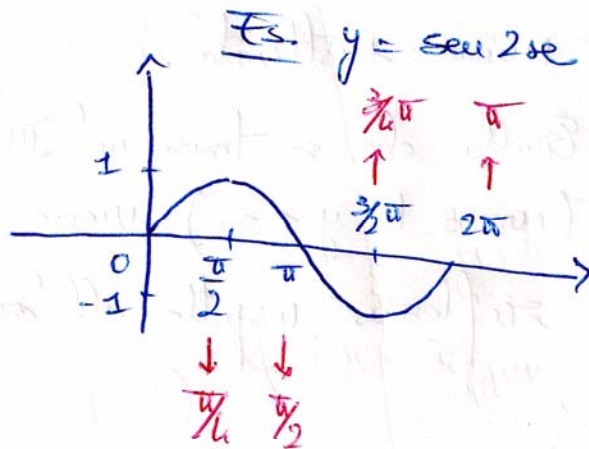
$$y = 2 \sin x$$

Dilatazione in direz. y

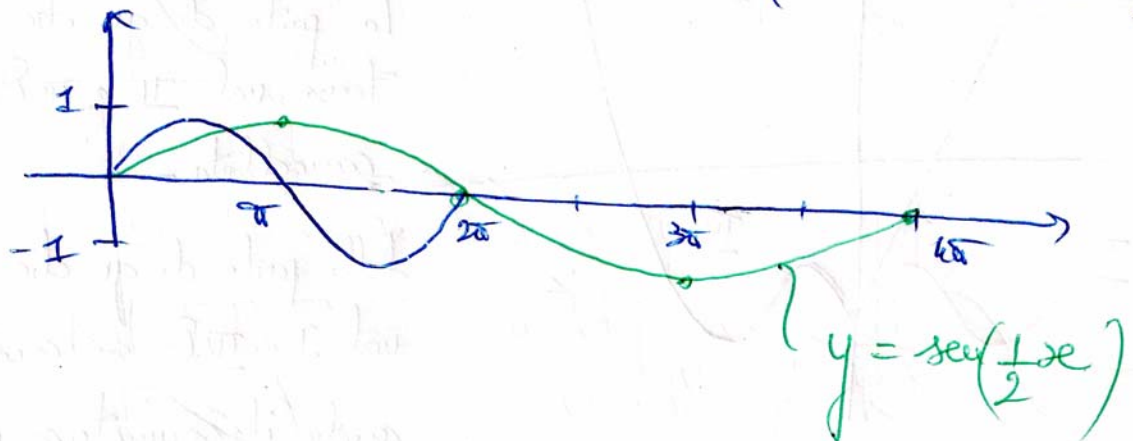
$$y = \frac{1}{2} \sin x$$

Contrazione in direz. y

④ $f(kx)$ → Si dividono per k
tutte le ascisse



Es. $y = \sin \frac{1}{2}x$ → Moltiplico tutte
le ascisse per 2
(Dilatazione in dir. x)

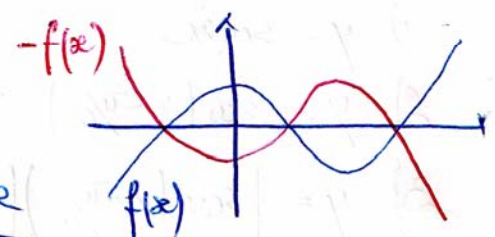


⑤ $-f(x)$ è un caso particolare di $k f(x)$
con $k = -1$

⇒ moltiplico tutte
le ordinate per (-1)

⇒ Cambiano tutte

segno ⇒ Si ottiene il
simul. rispetto a x



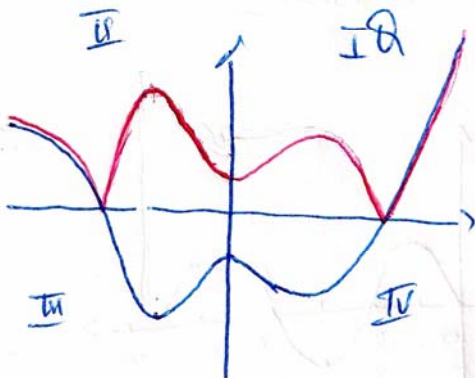
⑥

$$|f(x)|$$

2,

La parte di grafico che si trova nel I e II Quadrante rimane inalterata.

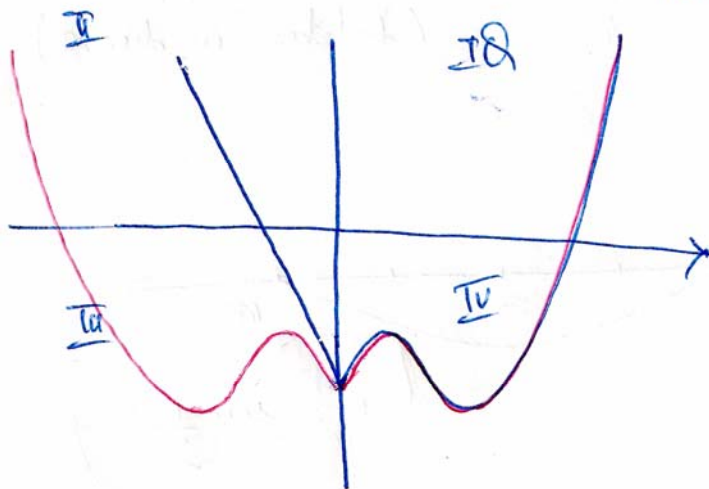
Quella che si trova nel III e IV Quadrante (ovvero $y < 0$) viene riflessa rispetto all'asse x .



⑦

$$f(|x|)$$

→ la parte di graf. che si trova nel I e IV Quadrante (per $x > 0$) rimane inalterata.



La parte di gr. che si trova nel II e III Quadrante viene cancellata.

Della parte di gr. che sta nel I e IV Quadrante si considera anche il simmetrico risp a y .

Es St. di funz. $y = e^x \cdot |1-2x|$

$D: \mathbb{R}$

Nè pari, nè disp.

Int. ~~asse~~ y : $y = e^0 \cdot |1| = 1$

Int. ~~asse~~ x : $e^x \cdot |1-2x| = 0 \Rightarrow |1-2x| = 0$

Segue: $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow 1-2x = 0 \Rightarrow x = 1/2$

lim $e^x \cdot |1-2x| = +\infty$
 $x \rightarrow +\infty$
 $+\infty \cdot |-\infty| = (+\infty) \cdot (+\infty)$

$\Rightarrow$ Può essere un As. Obl.
 $y = \text{ind. eq.}$

lim $e^x \cdot |1-2x| =$
 $x \rightarrow -\infty$
 $0 \cdot \infty$

$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot |1-2x|}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} |1-2x| =$
 $= (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot (1-2x) =$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 2x \cdot e^x) =$
 $(\frac{0}{0})$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x e^x = -2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{(H)}{=} -2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$

$\Rightarrow$ L'asse x (per $x \rightarrow -\infty$)
 è Asint. Orizz.

$(\frac{\infty}{\infty})$ $\uparrow$ Cresce più
 rapidamente il denominatore

$|1-2x| = \begin{cases} 1-2x, & 1-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1/2 \\ -(1-2x), & x > 1/2 \end{cases}$

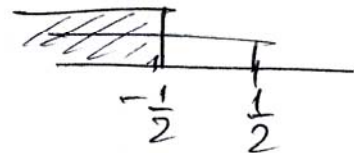
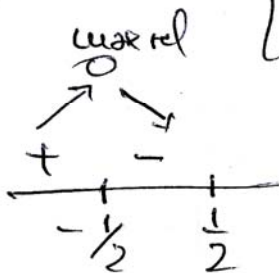
$y = \begin{cases} e^x \cdot (1-2x), & x \leq 1/2 \\ -e^x (1-2x), & x > 1/2 \end{cases}$

$$y' = \begin{cases} e^x \cdot (1-2x) + e^x \cdot (-2) = e^x(1-2x-2) = \\ = -e^x(1+2x), & x \leq \frac{1}{2} \\ e^x(1+2x), & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x \leq \frac{1}{2}$

$$y' = 0 \Rightarrow 1+2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{Pt. Stab.}$$

$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+2x < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$



Per $x = -\frac{1}{2}$
si ha un max rel

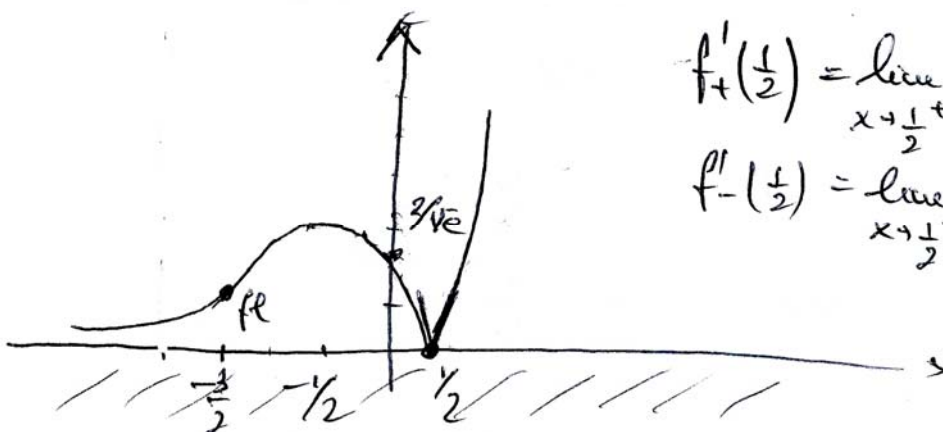
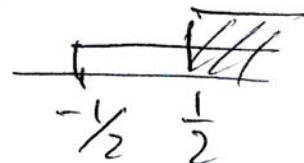
$$\text{e vale } f(-\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot |1-2(-\frac{1}{2})| = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$x > \frac{1}{2}$

$$y' = 0 \Rightarrow 1+2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{Non Acc.}$$

$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+2x > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{No Pt Stab.}$$

Per $x > \frac{1}{2}$ $f(x)$ è crescente



$$f'_+(\frac{1}{2}) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} e^x(1+2x) = 2\sqrt{e}$$

$$f'_-(\frac{1}{2}) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} [-e^x(1+2x)] = -2\sqrt{e}$$

$x = \frac{1}{2}$ Pt Angol.

$$y'' = -e^x(1+2x) - e^x \cdot 2 = -e^x(1+2x+2) = -e^x(3+2x)$$

$$\boxed{x \leq \frac{1}{2}}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 3+2x = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{Pt. di flesso}$$

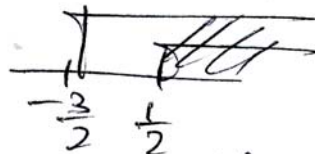
$$y'' > 0 \Rightarrow 3+2x < 0$$

$$x < -\frac{3}{2} \quad \text{Conc. vs l'alto}$$

$$\boxed{x > \frac{1}{2}} \quad y'' = +e^x(3+2x)$$

$$y'' = 0 \quad \text{mai!}$$

$$y'' > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$x > \frac{1}{2} \rightarrow \text{Conc. vs l'alto}$$

Def.

$$y = \begin{cases} e^x(1-2x), & x \leq \frac{1}{2} \\ -e^x(1-2x), & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Avrei potuto studiare

la funz. $g(x) = e^x(1-2x)$

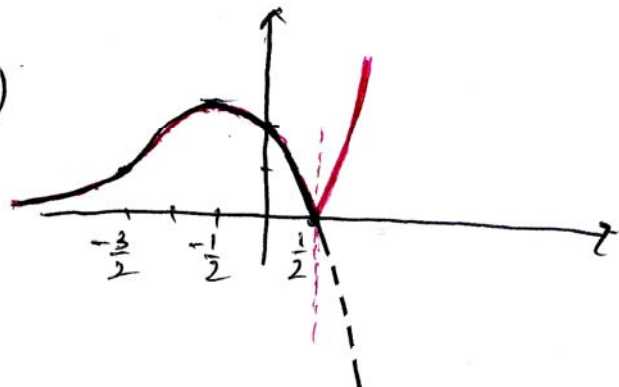
Considerare solo il tratto

per $x \leq \frac{1}{2}$

e per $x > \frac{1}{2}$ osservare che

$$f(x) = -g(x)$$

$\hookrightarrow$ Considero il Simm. risp. all'asse x .



Teorema Se f è derivabile nel pt $x_0 \Rightarrow$ è continua in x_0

Dici

per tp $f(x)$ è derivabile
nel pt $x_0 \Rightarrow$ esiste

la derivata prima $f'(x_0)$

$\Rightarrow$ esiste finito

$$\left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \right|^{4p}$$

il viceversa non vale

Es. $y = |x|$

è continua ma non
derivabile per $x=0$

Dobbiamo dim. che $f(x)$ è continua nel pt x_0

ovvero che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Ponendo $x = x_0 + h$

si ha $h = x - x_0$

$\Rightarrow$ se $x \rightarrow x_0 \Rightarrow h \rightarrow 0$

questo equivale
a dimostrare che:

$$\textcircled{Th} \left| \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0) \right|$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h \right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{= f'(x_0)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = f'(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} h}_{= 0} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) - \overbrace{\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0)}^{= f(x_0)} = 0$$

$$\Rightarrow \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \right| \text{ c.v.d.}$$

Esercizio n° 218

Si determini l'equaz. della retta t_g nel pt di ascissa e
 il grafico della funzione $f(x) = \sin(x-e) + \ln x$

$$f(e) = \sin 0 + \ln e = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \text{Il punto ha coordin. } (e; 1)$$

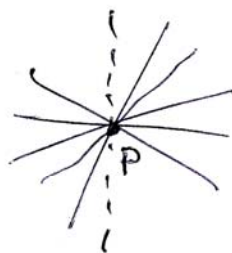
Fascio proprio di rette
 di centro $P(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = m(x - e)$$

$$\downarrow$$

$$m_t = f'(e)$$



$$f'(x) = \cos(x-e) + \frac{1}{x}$$

$$f'(e) = \cos 0 + \frac{1}{e} =$$

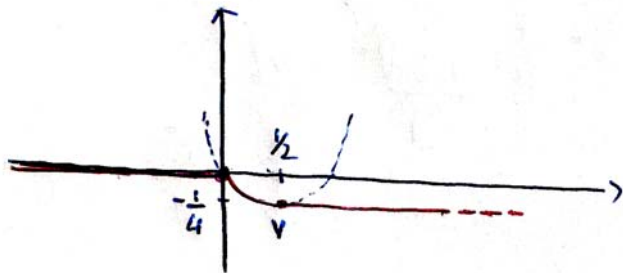
$$t) \quad y - 1 = \frac{e+1}{e} \cdot (x - e) \quad = 1 + \frac{1}{e} = \frac{e+1}{e}$$

$$y = \frac{e+1}{e} \cdot x + 1 - \frac{e+1}{e} \cdot x$$

$$\boxed{y = \frac{e+1}{e} \cdot x - e}$$

Es2 - COMPITO 5/2/14

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 - x & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{4} & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



per $x=0$ pt angolare
 $\Rightarrow$ no derivab.

Dal graf. $f(x)$ è continua!

$y=k$ funzione costante
 $\Rightarrow$ Retta orizz.

$y = x^2 - x$ parabola
 passante per $(0,0)$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2} = +\frac{1}{2}$$

$$y_v = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

Osserv. le rette orizz. hanno
 coeff. ang. $m=0$

La tg alla parabola in V è orizz.
 (con $m=0$) $\Rightarrow$ per $x=\frac{1}{2}$ $f'_+ = f'_- = 0$

Calcolare la derivata della funz. per $x=0$ e $x=\frac{1}{2}$
 usando la definizione

$$f'_\pm(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\boxed{x_0 = 0}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

(<0) $\rightarrow$ sono nel I interv.!

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(h-1)}{h} = -1$$

Non è
 DERIVABILE
 in
 $x=0$

$$\boxed{x_0 = 1/2}$$

sta nel III int. $(= -1/4)$

$$\begin{aligned} f'_-(1/2) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\overbrace{1/2+h}^{\text{sta nel III int.}}) - f(1/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(\frac{1}{2}+h)^2 - (\frac{1}{2}+h) + \frac{1}{4}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{\frac{1}{4}} + h^2 + \cancel{h} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{h} + \cancel{\frac{1}{4}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2}{h} = 0 \end{aligned}$$

$$f'_+(1/2) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\overbrace{1/2+h}^{\text{sta nel III}}) - f(1/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-1/4 - (-1/4)}{h} = 0$$

DERIV. per $x = 1/2$