

Es 1.2 - 9/12/13

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - e^x}{x + x^2}$$

$$\sqrt{x+1} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + R_1(x)$$

$$e^x = 1 + x + R_1(x)$$

$$\sqrt{x+1} - e^x = 1 + \frac{1}{2}x - 1 - x + R_1(x) = -\frac{1}{2}x + R_1(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}}{1+x} = -\frac{1}{2}$$

Oppure :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - e^x}{x + x^2} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2(x+1)} - e^x}{1 + 2x} = -\frac{1}{2}$$

Es. 4. - 9/12/13

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$$

$$f: [-4, -1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Si giustifichi l'esist.
del max e min globale
della funt. e si
determinino.

Nell' interv. chiuso $[-4, -1]$

$f(x)$ è continua perché somma di funt. continue

$\Rightarrow$ e il teor di Weierstrass ammette max e min assoluti.

Per trovare i confronti i valori che la funt. assume

$\rightarrow$ agli estremi del dominio : $f(-4) = -2$

$$f(-1) = -\frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ nei pt critica:

max/min rel. ($y'=0$) $\Rightarrow f(2) = 2$
pt di non derivabilità $\rightarrow$ non ci sono!

$$f'(x) = -\frac{2x}{2} - \frac{8}{x^2} = -\frac{x^3+8}{x^2}$$

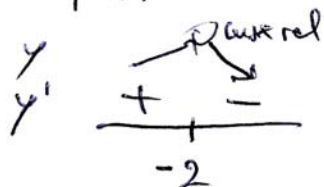
in $[-4, -1]$
 $f'(x)$ esiste
sempre.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3+8 = 0$$

$$x^3 = -8$$

$$x = -2 \quad \text{Pt Stationario}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x^3+8 < 0 \Rightarrow x < -2$$



per $x = -2$ si ha
un pt di max rel.
e vale $f(2) = 2$

per $x = -2$ si ha
max rel e Ass!!
 $(-2; 2)$

per $x = -4$ si ha
il min Ass $(-4; -2)$

Es 15 - 4/7/13

Impresa. Il ricavo tot ottenuto producendo una quantità $q \geq 0$ del bene è descritto dalla funz:

$$R: q \rightarrow 4 - 2^{-2q}$$

Il costo necessario per produrre q è descritto da:

$$C: q \rightarrow \frac{2^q}{4}$$

L'impr. ha come obiettivo la massimizzazione del profitto

$$\pi = R(q) - C(q).$$

Si assuma che la quantità max che l'impresa può produrre sia 4.

- Si scriva il probl. di massimizzazione del profitto e si dica se ammette soluzione
- Si dica qual è la soluz. dell'impresa -

$$\begin{cases} \pi = 4 - 2^{-2q} - \frac{2^q}{4} & \leftarrow \text{funz. da massimizz.} \\ 0 \leq q \leq 4 & \leftarrow \text{Vincolo} \end{cases}$$

$$\frac{d\pi}{dq} = -2^{-2q} \cdot (-2) \ln 2 - \frac{1}{4} \cdot 2^q \ln 2$$

$$\pi'(q) = 0 \Rightarrow +2^{-2q} \cdot 2 \ln 2 - \frac{\ln 2}{4} \cdot 2^q = 0$$

$$\ln 2 \left(2 \cdot 2^{-2q} - \frac{2^q}{4} \right) = 0$$

$$\frac{2}{2^{2q}} = \frac{2^q}{4} \Rightarrow 8 = 2^{2q} \cdot 2^q$$

$$8 = 2^{3q}$$

$$8 = (2^3)^q$$

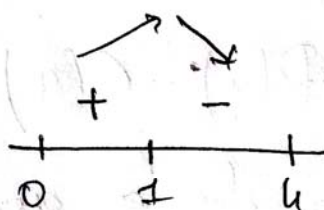
$$8 = 8^q \Rightarrow q = 1$$

$$\pi' > 0$$

↯

$$\frac{2}{2^{2q}} > \frac{2^q}{4}$$

$$8 > 8^q \Rightarrow q < 1$$



$\Rightarrow$ Per $q = 1$ si ha un massimo

$$\text{e vale } \pi(1) = 4 - 2^{-2} - \frac{2}{4} =$$

$$= 4 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \frac{13}{4}$$

Compito 9/7/09

②

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{x \sin x (1 + \sqrt{\cos x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x (1 + \sqrt{\cos x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{|-x+5|} - \sqrt{|1+x-x^2|}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-5} - \sqrt{-1-x+x^2}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-5 - (-1-x+x^2)}{\sqrt{x-5} + \sqrt{-1-x+x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-4-x^2}{\sqrt{x-5} + \sqrt{-1-x+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{|x|} = -\infty$$

$$|-x+5| = \begin{cases} -x+5, & x \leq 5 \\ x-5, & x > 5 \end{cases}$$

$$|1+x-x^2| = \begin{cases} 1+x-x^2 & \text{per i val. interni} \\ -1-x+x^2 & \text{per i val. est.} \end{cases}$$

$$\Delta = 1+4$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$



3
A Si dim. che l'eq. $e^{x^3-1} - 2e^{x+2} = 0$
ammette una soluz. strettamente positiva,

$$f(x) = e^{x^3-1} - 2e^{x+2} \rightarrow \text{funz. continua}$$

perché somma
e composizione
di funz. cont. in $\mathbb{R}$.

$$f(0) = e^{-1} - 2e^2 = \frac{1}{e} - 2e^2 (< 0)$$

$$f(2) = e^7 - 2e^4 = e^4(e^3 - 2) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ cont. in } [0, 2]$$

$$f(0) < 0$$

$$f(2) > 0$$

$$\exists c \in (0, 2) \text{ t.c.}$$

$$f(c) = 0.$$

3B

$$f(x) = \begin{cases} k \frac{e^{kx} - 1}{x}, & x > 0 \\ k^2, & x = 0 \\ \frac{\ln((1-x)^{2k})}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

Trovare il
valore di k
in modo che
 $f(x)$ risulti
continua
per $x=0$

$$f(0) = k^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln((1-x)^{2k})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2k \ln(1-x)}{x} =$$

$$y = -x \Rightarrow \begin{matrix} \text{se } x \rightarrow 0^- \\ \Rightarrow y \rightarrow 0^+ \end{matrix}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} 2k \frac{\ln(1+y)}{-y} = -2k$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} k \frac{e^{kx} - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} k^2 \frac{e^{kx} - 1}{kx} = k^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Deve essere $k^2 = -2k$

$$k^2 + 2k = 0$$

$$k(k+2) = 0$$

$$\begin{cases} k=0 \\ k=-2 \end{cases}$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{-e^x}{x^2-1}$$

$$f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

Trovare il Dominio di f
la funz. è iniettiva?
è suriettiva?

$$\text{Dominio: } x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$$

$$f'(x) = - \frac{e^x(x^2-1) - e^x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= - \frac{e^x(x^2-1-2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$x^2-2x-1=0$$

$$\Delta = 1+1=2$$

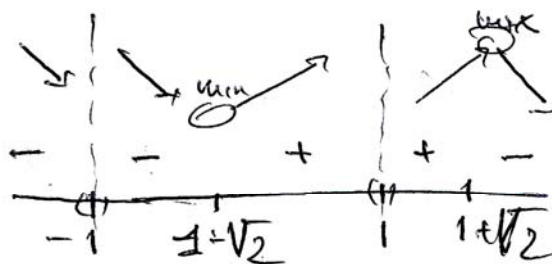
$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

pt stazionari

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x^2-2x-1 < 0$$

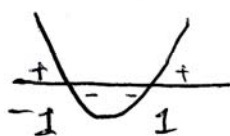
per i val. interni

$$1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-e^x}{x^2-1} = \frac{-e}{0^+} =$$

$$= -\infty$$



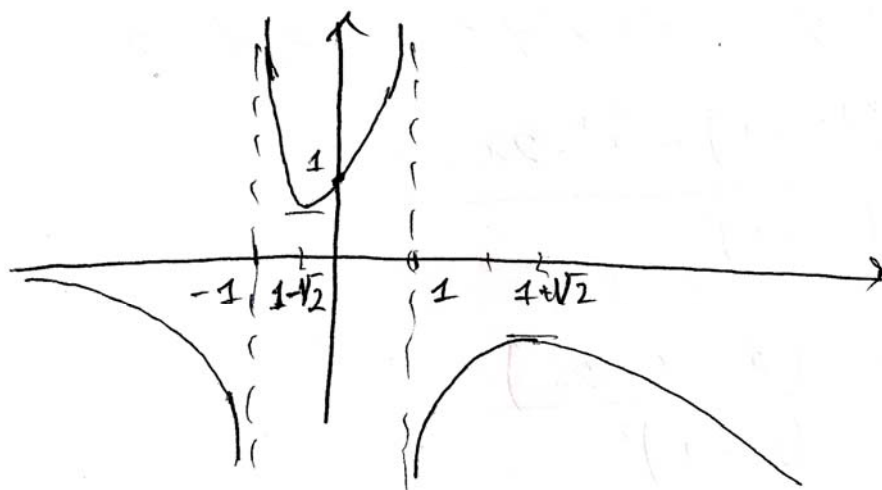
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-e^x}{x^2-1} = \frac{-e}{0^-} = +\infty$$

La retta $x=1$
è asint. verticale

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-e^x}{x^2 - 1} = \frac{-e^{-1}}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-e^x}{x^2 - 1} = \frac{-e^{-1}}{0^+} = -\infty$$

} la retta
 $x = -1$
è As. Verticale



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{cresce più rap. il Num.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{0}{+\infty} = 0 \Rightarrow \text{L'asse } x \text{ è asint. orizz. per } x \rightarrow -\infty$$

Non è iniettiva

Non è suriettiva

$$\text{Im} f: (-\infty, 0) \cup [f(1 + \sqrt{2}), +\infty)$$

$$\text{Im} f \subset \mathbb{R}$$

$$2) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Dim: f è derivabile e la sua derivata non è continua

$$f'_+(0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1 \cdot h) - \cancel{f(0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = 0$$

$$f'_+(0) = f'_-(0)$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - \cancel{f(0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \left(-\cos \frac{1}{x} \right) \quad \nexists$$